Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dr. Johannes Lengler

9. Übung zur Analysis I, Sommersemester 2010

Aufgabe 1: (*7+7=14 Punkte*)
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie:

(a) Gilt $f([0,1]) \subseteq [0,1]$, so hat f einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) = x_0$.

(b) Gilt $f(0) = f(1)$, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ mit $f(x_n) = f(x_n + \frac{1}{n})$.

Hinweis: Wenden Sie jeweils den Zwischenwertsatz auf geeignete Hilfsfunktionen an.

Aufgabe 2: (*1+6+2+3=12 Punkte*)
Mit dieser Aufgabe sollen Sie ein Verfahren konstruieren, um $\sqrt[3]{2}$ zu berechnen. Dazu bemerken wir zunächst, dass $x = \sqrt[3]{2}$ offenbar eine Nullstelle des Polynoms $x^3 - 2$ und damit ein Fixpunkt der Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{2}x^4$ ist.

(a) Zeigen Sie: Für jedes reelle $m \neq 1$ ist $\sqrt[3]{2}$ auch ein Fixpunkt der Funktion

$$f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{\varphi(x) - mx}{1 - m}.$$

(b) Zeigen Sie: Schränkt man die Funktionen f_m auf ein Intervall $I := [a, b]$ ein für beliebige $1 \leq a \leq \sqrt[3]{2} < b$, so gibt es ein $m \neq 1$, für das der Wertebereich von f_m wieder in I enthalten ist und für das die Funktion $f_m : I \to I$ stark kontrahierend ist.
Geben Sie für $a = 1$, $b = 2$ ein geeignetes m an.

(c) Seien a, b beliebig mit $1 \leq a \leq \sqrt[3]{2} < b$, und m erfülle die Bedingungen aus Teil (ii). Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die definiert wird durch

$$x_1 := b, \qquad x_{n+1} := f_m(x_n) \quad \text{für } n \geq 1,$$

gegen $\sqrt[3]{2}$ konvergiert.

(d) Berechnen Sie die ersten 8 Folgenglieder einmal für $b := 2$ und $m := 13$, und einmal für $b := 1,4$ und $m := 4$. Sie dürfen hierfür einen Taschenrechner oder einen Computer benutzen. Wie groß ist der relative Fehler von x_8 gegenüber dem richtigen Wert von $\sqrt[3]{2}$?
Hinweis: Der relative Fehler ist definiert als $\frac{x_8 - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$ und wird häufig in Prozent angegeben.

Aufgabe 3: (*12*2=24 Punkte*)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und sei

(a) $I := (a, b)$, bzw.

(b) $I := [a, b]$.

Sei nun f eine reellwertige Funktion von I nach $\mathbb{R}$. Betrachten Sie die drei Aussagen

- A_1 :=„f ist stetig.“
- A_2 :=„f ist gleichmäßig stetig.“
- A_3 :=„f ist Lipschitz-beschränkt.“

Geben Sie für jede Implikation zwischen A_1, A_2 und A_3 an, ob sie gilt oder nicht. (Beweis oder Gegenbeispiel!)

Abgabe am Freitag, 18.06.2010 vor der Vorlesung