Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dr. Johannes Lengler

10. Übung zur Analysis I, Sommersemester 2010

Aufgabe 1: (*10 Punkte*)
Zeigen Sie: Die Menge $M := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ist kompakt.

Aufgabe 2: (*8+2=10 Punkte*)
Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$(x)_k := \prod_{j=1}^{k}(x-j+1) \qquad \text{und} \qquad \binom{x}{k} := \frac{(x)_k}{k!}.$$

Zeigen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$:

(a)
$$(x+y)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)_k (y)_{n-k}.$$

(b)
$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}.$$

Aufgabe 3: (*2+3+5+10+10=30 Punkte*)

(a) Seien $a > 0$ eine reelle und $q = \frac{n}{m}$ eine rationale Zahl ($n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie: Es gibt genau eine positive reelle Zahl w, die die Gleichung

$$w^m = a^n$$

erfüllt, und diese Zahl hängt nicht von der Darstellung von q ab. (D.h. lässt sich q auch als $q = \frac{n'}{m'}$ darstellen, so ist auch $w^{m'} = a^{n'}$ erfüllt.)
Wir bezeichnen die Zahl w im Folgenden als a^q.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $a, b > 0$, $q, r \in \mathbb{Q}$ gilt:

(i) $(ab)^q = a^q b^q$.

(ii) $a^{q+r} = a^q a^r$.

(iii) $a^{qr} = (a^q)^r$.

(c) Zeigen Sie, dass es zu $a > 0$ genau eine stetige Funktion $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $q \in \mathbb{Q}$ gilt: $f_a(q) = a^q$.
Im Folgenden schreiben wir für $f_a(x)$ auch a^x.
Zeigen Sie, dass die Formeln (i), (ii) und (iii) auch für beliebige *reelle* q und r gelten.

(d) Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und sei I ein abgeschlossenes Intervall mit $I \subset (0, 1)$. Zeigen Sie: Die Reihe

$$R_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k$$

konvergiert absolut und gleichmäßig für $x \in I$ und $s \in J$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass es für alle $l > 1$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $k \geq k_0$ und alle $s \in J$ gilt: $\left|\binom{s}{k+1}\right| \leq l \cdot \left|\binom{s}{k}\right|$.

(e) Zeigen Sie, dass für alle $s \in \mathbb{R}$ und alle $x \in (0, 1)$ gilt:

$$R_s(x) = (1 + x)^s. \tag{1}$$

Welche Formel ergibt sich für $s = -1$ und $y = -x$?
Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2, dass $R_s(x)R_t(x) = R_{s+t}(x)$ ist. (Cauchy-Produkt!) Folgern Sie, dass Formel (1) für alle *rationalen* s gilt, und verwenden Sie Teil (c).

Abgabe am Freitag, 25.06.2010 vor der Vorlesung