Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dr. Johannes Lengler

11. Übung zur Analysis I, Sommersemester 2010

Aufgabe 1: (*5+5=10 Punkte*)
Sei

$$f : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{xy}}{x+y}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in [0,\infty)$ sind die Funktionen

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R};\ t \mapsto f(x,t) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ t \mapsto f(t,y)$$

stetig.

(b) f ist nicht stetig (bezüglich des euklidischen Absolutbetrages auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}$).

Aufgabe 2: (*3+3+2+2=10 Punkte*)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$ nicht leer mit Abschluss $\overline{D}$, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion.
Zeigen Sie:

(a) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in D, so ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.
(b) f besitzt eine gleichmäßig stetige Fortsetzung nach $\overline{D}$.
(c) Ist D beschränkt, so ist f beschränkt.

Ist die Funktion

$$g : (0,1) \to \mathbb{R}; \qquad t \mapsto \frac{1}{\log t}$$

stetig bzw. gleichmäßig stetig?

Aufgabe 3: (*3+2+(2+3)=10 Punkte*)

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to a} \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$ für $a = \infty, 0+, 0-$.
(b) Skizzieren Sie die Funktionen cosh und sinh in einem Koordinatensystem.
(c) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin(x)}{x}$ für $a = \infty, 0$.
Hinweis: Betrachten Sie für $a = 0$ die Potenzreihenentwicklung von $\sin(x)$.

Aufgabe 4: *(1+(1+1+2+2+2+2+1+2)+(2+4)=20 Punkte)*

(a) Welche der folgenden vier komplexen Zahlen sind gleich, welche sind verschieden voneinander?

$$z_1 = 2 \cdot e^{-i \cdot \frac{1}{3}\pi}, \quad z_2 = -2 \cdot e^{i \cdot \frac{2}{3}\pi}, \quad z_3 = -2 \cdot e^{-i \cdot \frac{5}{3}\pi}, \quad z_4 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{5}{3}\pi}$$

(b) Seien $u, v, w, z \in \mathbb{C}$. Ergänzen Sie die folgende Tabelle und zeichnen Sie die vorkommenden Zahlen in ein Koordinatensystem mit reeller und imaginärer Achse ein.

	Argument	Betrag	Realteil	Imaginärteil
u	$\frac{7}{6}\pi$	$\sqrt{12}$		
v	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{3}$		
w			2	2
z			$-\sqrt{3}$	1
$u \cdot v$				
$\frac{w}{z}$				
$\frac{1}{v}$				
w^8				

(c) Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen über $\mathbb{C}$:

(i) $z^2 - 4z + 29 = 0$ (ii) $(3+i)z^2 + (-22+6i)z + (25-25i) = 0$

Hinweis: Bringen Sie die Gleichung in die Form $(z - z_0)^2 - z_1 = 0$. Schreiben Sie nun z_1 in Polarkoordinaten und finden Sie dadurch ein w_1 mit $w_1^2 = z_1$. Wenden Sie dann die dritte binomische Formel an.

Abgabe am Freitag, 02.07.2010 vor der Vorlesung