Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dr. Johannes Lengler

12. Übung zur Analysis I, Sommersemester 2010

Aufgabe 1: (*6+4=10 Punkte*)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und bestimmen Sie f'.
(b) Untersuchen Sie f' auf Stetigkeit.

Aufgabe 2: (*3+3+3+3+3+3=18 Punkte*)
Bestimmen Sie für folgende Funktionen f den natürlichen Definitionsbereich D_f, untersuchen Sie, für welche $x \in D_f$ die Funktion f differenzierbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls $f'(x)$:
(a) $f(x) := |\sin x|$;
(b) $f(x) := |x^3|$;
(c) $f(x) := \frac{\sin(\exp x)}{\sqrt{x+1}}$;
(d) $f(x) := (x^2 + 3x - 7)\tan x$ (*Hinweis:* $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$);
(e) $f(x) := \pi^x$;
(f) $f(x) := \begin{cases} x^3, & \text{falls } x \geq 0 \\ -e^3 x^2, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$.

Aufgabe 3: (*8 Punkte*)
Ein Fabrikant möchte eine zylindrische Dose vom Volumen $1l$ herstellen. Wie muss er den Radius des Zylinders wählen, wenn er dabei möglichst wenig Material einsetzen will?

Aufgabe 4: (*10+4=14 Punkte*)
(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $J \subset I$ ein abgeschlossenes Intervall. Zeigen Sie, dass f auf J Lipschitz-beschränkt ist mit Lipschitz-Konstante $\sup\limits_{\xi \in J} |f'(\xi)|$.

(b) Zeigen Sie:

$$|\cos x - 1| \leq |x| \qquad (x \in \mathbb{R})$$

und

$$|\log x - \log y| \leq \frac{|x-y|}{\min\{x,y\}} \qquad (x, y > 0).$$

Abgabe am Freitag, 09.07.2010 vor der Vorlesung