Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dr. Johannes Lengler

13. Übung zur Analysis I, Sommersemester 2010

Aufgabe 1: *(3+3+3=9 Punkte)*
Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie sie gegebenenfalls:

(a) $\lim_{t\to 1} \sin\left(\frac{1}{1-t}\right) \log t$;

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$;

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{x}$.

Aufgabe 2: *(5+4+1=10 Punkte)*
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist.

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt 0.

(c) Gegen welche Funktion konvergiert die Taylorreihe?

Aufgabe 3: *(4+16=20 Punkte)*

(a) Zeigen Sie dass das Polynom $f(X) := X^3 + X + 1$ genau eine reelle Nullstelle x_0 hat. Bestimmen Sie eine ganze Zahl n mit $x_0 \in [n, n+1]$.

(b) Finden Sie (mit Beweis) eine rekursiv definierte Folge, die gegen x_0 konvergiert. Ihre Rekursion soll explizit sein und nur elementare Operationen wie +,-,*,/ verwenden.
Berechnen Sie anschließend (mit Computerhilfe) eine Näherung für x_0 anhand Ihrer Rekursion.
Hinweis: Imitieren Sie den Ansatz aus Aufgabe 2 von Blatt 9.

Aufgabe 4: *(9+3=12 Punkte)*

(a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reell- oder komplexwertiger Funktionen auf der Menge $A \subseteq \mathbb{R}$. Seien M_n positive Konstanten, sodass $|f_n(x)| \leq M_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in A$. Weiter konvergiere die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$.
Zeigen Sie, dass dann die Reihe von Funktionen

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmäßig auf A konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \sin(2^k x)}{3^k}$$

stetig ist.
Hinweis: Sie sollten die Tatsache verwenden, dass $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ eine stetige Funktion ist, deren Werte im Intervall $[-1, 1]$ liegen.

Abgabe am Freitag, 16.07.2010 vor der Vorlesung