Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dr. Johannes Lengler

14. Übung zur Analysis I, Sommersemester 2010

Aufgabe 1: (*10 Punkte*)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt 0 stetig. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{f(\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{f(0)\}$$

kompakt ist.

Aufgabe 2: (*10 Punkte*)
Sei I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

(a) Zeigen Sie: Es gilt genau dann $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, wenn f monoton wachsend ist.

(b) Zeigen Sie: Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton wachsend.

(c) Zeigen Sie, dass die Umkehrung von (b) falsch ist.

Aufgabe 3: (*10 Punkte*)
Zeigen Sie, dass für $|x| < 1$ die Funktion $x \mapsto \log(1+x)$ durch ihre Taylorreihe

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

dargestellt wird.

Aufgabe 4: (*5+1+3+1=10 Punkte*)
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge der f_n auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert.

(b) Bestimmen Sie die Ableitung von f.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge der Ableitungen f'_n punktweise auf $\mathbb{R}$ gegen eine Grenzfunktion g konvergiert.

(d) Zeigen Sie, dass $g \neq f'$.

Aufgabe 5: (*10 Punkte*)
Berechnen Sie das Integral
$$\int_0^{\log 2} \frac{e^{4x}}{e^{2x}+1}dx.$$
Hinweis: Wenden Sie die Substitution $t := \varphi^{-1}(x) := e^{2x}+1$ an.

Aufgabe 6: (*15+5=20 Punkte*)

(a) Sei $K_0 \in \mathbb{N}$ und sei $f : D = [K_0-1,\infty) \to \mathbb{R}$ eine integrierbare, monoton wachsende oder monoton fallende Funktion. Sei $a \in D$. Wir benutzen den Ausdruck $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ als Abkürzung für den Grenzwert $\lim\limits_{K\to\infty} \int\limits_a^K f(x)dx$. (Dieser Grenzwert kann existieren oder nicht existieren.) Zeigen Sie:

(i) Ist $\int_{K_0}^\infty f(x)\ dx = \pm\infty$, so ist auch $\sum_{k=K_0}^\infty f(k) = \pm\infty$.

(ii) Existiert der Grenzwert $\int_{K_0}^\infty f(x)\ dx$, so konvergiert $\sum_{k=K_0}^\infty f(k)$, und es ist

- für f monoton wachsend (dann ist automatisch $f(x) \leq 0$ für alle x):
$$\int_{K_0-1}^\infty f(x)\ dx \leq \sum_{k=K_0}^\infty f(k) \leq \int_{K_0}^\infty f(x)\ dx.$$
- für f monoton fallend (dann ist automatisch $f(x) \geq 0$ für alle x):
$$\int_{K_0}^\infty f(x)\ dx \leq \sum_{k=K_0}^\infty f(k) \leq \int_{K_0-1}^\infty f(x)\ dx.$$

(b) Sei $\alpha > 1$. Zeigen Sie mit Hilfe des obigen *Integral-Kriteriums*, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert, und geben Sie ein beschränktes Intervall an, in dem der Grenzwert liegt.
Hinweis: Sie sollen also *nicht* wie in einer früheren Aufgabe das Verdichtungskriterium benutzen.

Aufgabe 7: (*3+3+3+3+3+3=18 Punkte*)
Bestimmen Sie die folgenden (nicht eindeutig bestimmten!) Stammfunktionen über geeigneten Intervallen:

(a) $\int \frac{\sin x \cos x}{1-\sin x}dx$	*(b)* $\int e^x \sin x\, dx$	*(c)* $\int xe^{x^2}dx$
(d) $\int c^x\, dx$ für $c \in \mathbb{R}$	*(e)* $\int x \log x\, dx$	*(f)* $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$

Dieses Übungsblatt dient dazu, den Stoff der letzten Wochen zu vertiefen und abzurunden. Es wird nicht mehr abgegeben oder besprochen.