Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dr. Johannes Lengler

2.4.5 Rechenregeln in $\mathbb{R}$

Für die Addition, die Multiplikation, die kleiner/gleich-Beziehung und den Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$ gelten die folgenden Regeln:
Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} (a+b)+c = a+(b+c) &\qquad \text{(Assoziativgesetz der Addition)} \\ a+b = b+a &\qquad \text{(Kommutativgesetz der Addition)} \\ a+0 = 0+a &\qquad \text{(0 ist Neutralelement für die Addition)} \end{aligned}$$

$$a+(-a) = (-a)+a = 0 \qquad \text{(Existenz der additiven Inverse zu a)}$$

Die Regeln bis hier besagen, dass $(\mathbb{R}, +)$ eine *abelsche* (= kommutative) *Gruppe* ist;

$$\begin{aligned} (ab)c = a(bc) &\qquad \text{(Assoziativgesetz der Multiplikation)} \\ ab = ba &\qquad \text{(Kommutativgesetz der Multiplikation)} \\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a &\qquad \text{(1 ist Neutralelement der Multiplikation)} \\ (a+b)c = ac+bc &\qquad \text{(Distributivgesetz)} \end{aligned}$$

Die Regeln bis hier besagen, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein kommutativer *Ring* ist;
Ist $a \neq 0$, so gibt es ein wohlbestimmtes a^{-1} mit

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 \qquad \text{(Existenz der multiplikativen Inverse)}$$

Die Regeln bis hier besagen, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein *Körper* ist;

$$\begin{aligned} a \leq b &\quad\Longrightarrow\quad a+c \leq b+c \\ a \leq b \text{ und } c \geq 0 &\quad\Longrightarrow\quad ac \leq bc \end{aligned}$$

Die Regeln bis hier besagen, dass $(\mathbb{R}, +, ., \text{“}\leq\text{”})$ ein *geordneter Körper* ist;

$$\begin{aligned} &|a| \geq 0, \quad |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \\ &|ab| = |a|\,|b| \\ &|a+b| \leq |a| + |b| \end{aligned}$$

Die letzten drei Regeln besagen, dass “| |” ein *Absolutbetrag* auf dem Körper $\mathbb{R}$ ist.