



Saarbrücken, den 22.02.2016

Hauptklausur zu Einführung in die Algebra und Zahlentheorie im WS 2015/2016

Hinweis zur Klausur: Sie dürfen das Gauß-Lemma und das Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium verwenden.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Wieviele Elemente der Ordnung 10 gibt es in S_7 ?

Aufgabe 2. (10 = 5 + 5 Punkte)

(i) Zeigen Sie: Eine Gruppe G der Ordnung 93 ist auflösbar.

(ii) Ist jede solche Gruppe G abelsch? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Bestimmen Sie mittels des Lemmas von Burnside die Zahl der Perlenketten, die Sie aus vier weißen und fünf korallfarbenen Perlen bilden können.

Aufgabe 4. (10 = 5 + 5 Punkte)

(i) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ des Systems von Kongruenzen

$$\begin{aligned}x &\equiv 1 \pmod{75} \\x &\equiv 4 \pmod{9} \\x &\equiv 2 \pmod{4}\end{aligned}$$

(ii) Wieviele Faktoren 2 enthält der Binomialkoeffizient $\binom{2016}{1008}$?

Aufgabe 5. (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Ordnung der Restklasse von 2 in $(\mathbb{Z}/(2827))^*$.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Primfaktoren von 2827!

Aufgabe 6. (10 Punkte)

Geben Sie eine notwendige und hinreichende Kongruenzbedingung an die Primzahl $p > 2$ dafür, dass die Kongruenz

$$x^2 \equiv -10 \pmod{p}$$

eine Lösung hat.

Aufgabe 7. (10 = 5 + 5 Punkte)

Zeigen Sie die Irreduzibilität der folgenden Polynome über \mathbb{Q} :

(i) $f(X) = X^4 + 2X^3 - 6X^2 + X + 3$;

(ii) $g(X) = 2X^5 + \frac{5}{3}X^4 + \frac{10}{9}X^3 - \frac{5}{12}X + \frac{5}{18}$.

Aufgabe 8. (10 = 4 + 3 + 3 Punkte)

(i) Konstruieren Sie einen Körper K mit 16 Elementen!

(ii) Finden Sie (mittels der Beschreibung von K aus (i)) alle Lösungen β von $\beta^5 = 1$ in K .

(iii) Bestimmen Sie den Grad $[L : K]$ des Zerfällungskörpers L von $f(X) = X^{17} - 1$ über K .

Viel Erfolg !