



**Probeklausur zu Einführung in die Algebra und Zahlentheorie
im WS 2015/2016**

ERINNERUNG: Die Abschlussklausur findet statt am Montag, den 22. Februar 2012, von 9:00 Uhr (s.t., seien Sie bitte schon um 8:45 Uhr da!) bis 12:00 Uhr in Gebäude E2 5 im Hörsaal I. Als Hilfsmittel zugelassen ist ausschließlich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt. Mitzubringen sind unbeschriebenes Papier, Stifte, sowie ein Lichtbildausweis.

Für die acht Aufgaben gibt es jeweils 10 Punkte. Sie dürfen alle acht Aufgaben bearbeiten; bewertet werden jedoch jeweils nur die besten drei der Aufgaben 1 bis 4 und der Aufgaben 5 bis 8.

Hinweis zur Probeklausur: Sie dürfen das Gauß-Lemma und das Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium (vgl. Übungsblatt 13, Aufgabe 1) verwenden.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Wieviele Elemente der Ordnung 5 gibt es in S_8 ?

Aufgabe 2. (10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Zeigen Sie: Gruppen G der Ordnung

$$n = 25, 50, 75, 100, 125$$

sind auflösbar.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Bestimmen Sie mittels des Lemmas von Burnside die Zahl der Perlenketten, die Sie aus drei weißen und sechs dunkelblauen Perlen bilden können.

Aufgabe 4. (10 = 6 + 4 Punkte)

(i) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ des Systems von Kongruenzen

$$\begin{aligned}x &\equiv 1 \pmod{175} \\x &\equiv 3 \pmod{8} \\x &\equiv 1 \pmod{7}\end{aligned}$$

(ii) Wieviele Faktoren 5 enthält $2016!$?

Aufgabe 5. (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Ordnung der Restklasse von 2 in $(\mathbb{Z}/(39))^*$.

Aufgabe 6. (10 Punkte)

Für welche Primzahlen p zerfällt das Polynom

$$f(X) = X^2 + 2X + 7 \in \mathbb{F}_p[X]$$

in Linearfaktoren?

Aufgabe 7. (10 = 5 + 5 Punkte)

Zeigen Sie die Irreduzibilität der folgenden Polynome über \mathbb{Q} :

(i) $f(X) = X^4 + X^3 - 6X^2 + X - 6$;

(ii) $g(X) = 2X^4 + 6X^3 + \frac{3}{4}X + \frac{3}{4}$.

Aufgabe 8. (10 = 3 + 3 + 4 Punkte)

Es sei $f(X) = X^3 + X + 1 \in \mathbb{F}_5$.

(i) Zeigen Sie: f ist irreduzibel über \mathbb{F}_5 .

Es sei K der Körper $\mathbb{F}_5[X]/(f)$.

(ii) Gibt es in K primitive dritte Einheitswurzeln (Angabe oder Beweis des Gegenteils!)?

(iii) Wie groß ist der Grad $[L : K]$ des Zerfällungskörpers L von $X^7 - 1$ über K ?

Keine Abgabe, keine Korrektur, keine Besprechung!