Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

11. Übung zu Einführung in die Algebra und Zahlentheorie, WS 2015/2016

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Es sei x ein nilpotentes Element des Rings R (d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$).
Zeigen Sie, dass $1 + x$ eine Einheit von R ist, und bestimmen Sie die Inverse.

Aufgabe 2. *(2 + 2 + 2 = 6 Punkte)*
Es sei $f(X,Y) = XY^2 + X^3 \in \mathbb{Q}[X,Y]$.
Untersuchen Sie, welche der folgenden Faktorringe Körper sind.
(i) $\mathbb{Q}[X,Y]/(f(X,Y))$,
(ii) $\mathbb{Q}(X)[Y]/(f(X,Y))$,
(iii) $\mathbb{Q}(Y)[X]/(f(X,Y))$.

Aufgabe 3. *(10 Punkte)*
Welche der folgenden Körpererweiterungen sind endlich, algebraisch, transzendent?
(Versuchen Sie auch, jeweils den Grad der Erweiterung zu bestimmen!)
(i) $\mathbb{R} \mid \mathbb{Q}$,
(ii) $\mathbb{R} \mid \mathbb{Q}(\sqrt{2})$,
(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{pq}) \mid \mathbb{Q}$, mit Primzahlen $p \neq q$,
(iv) $\mathbb{Q}(\zeta) \mid \mathbb{Q}$, wobei $\zeta^n = 1$ gilt $(n \in \mathbb{N})$,
(v) $\mathbb{Q}(\{\zeta \mid \zeta \in \mathbb{C}, \zeta^n = 1, n \in \mathbb{N}\}) \mid \mathbb{Q}$,
(vi) $\mathbb{Q}(\{a \in \mathbb{C} \mid a \text{ algebraisch über } \mathbb{Q}\}) \mid \mathbb{Q}$,
(vii) $\mathbb{R}(\{a \in \mathbb{C} \mid a \text{ algebraisch über } \mathbb{R}\}) \mid \mathbb{R}$,
(viii) $\mathbb{R}(\{a \in \mathbb{C} \mid a \text{ algebraisch über } \mathbb{Q}\}) \mid \mathbb{Q}$,
(ix) $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) \mid \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$,
(x) $\mathbb{Q}(\sqrt{2^n} \mid n \in \mathbb{N}) \mid \mathbb{Q}$.

Aufgabe 4. *(5 + 5 + 10 = 20 Punkte)*
Es sei $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
(i) Berechnen Sie die Körpergrade von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \mid \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}) \mid \mathbb{Q}$.
(ii) Zeigen Sie, dass a algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist, und berechnen Sie das Minimalpolynom von a über $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ und über $\mathbb{Q}$.
(iii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(a)$ ist, also (warum?) jedes Element aus $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ von der Form $b_0 + b_1 a + b_2 a^2 + b_3 a^3$ mit $b_i \in \mathbb{Q}$ ist.
Berechnen Sie diese b_i explizit für a^4 und $\frac{1}{a}$.

Abgabe bis Donnerstag, den 21.01.2016
vor der Vorlesung in die Briefkästen