Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

# 12. Übung zu Einführung in die Algebra und Zahlentheorie, WS 2015/2016

**Aufgabe 1.** *(12 + 3 + 5 = 20 Punkte)*
$(i)$ Beweisen Sie das *Lemma von Gauß*:
Sind $g(X)$, $h(X)$ normierte Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ und liegt $f := g \cdot h$ in $\mathbb{Z}[X]$, so sind auch $g$ und $h$ in $\mathbb{Z}[X]$.
Zeigen Sie die Irreduzibilität der Polynome
$(ii)$ $f_1(X) = X^2 + n_1 X + n_0 \in \mathbb{Z}[X]$ mit $n_1, n_0 \in (\mathbb{Z} - 2\mathbb{Z})$ ;
$(iii)$ $f_2(X) = X^4 + m_3 X^3 + m_2 X^2 + m_1 X + m_0$ mit $m_1, m_2 \in 2\mathbb{Z}$ und $m_0, m_3 \in (\mathbb{Z} - 2\mathbb{Z})$ ;
über $\mathbb{Q}$.

*Hinweis zu (i):* Es sei $p$ eine Primzahl und $v_p : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$ die Abbildung mit $v_p(a) =$ Zahl der Faktoren $p$, die $a$ teilen. Setzen Sie $v_p$ fort zu einer Abbildung $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ und betrachten Sie die größten Indizes $i$ bzw. $j$, so dass der $i$-te Koeffizient $g_i$ von $g$ bzw. der $j$-te Koeffizient $h_j$ von $h$ minimalen Wert $v_p(g_i)$ bzw. $v_p(h_j)$ hat. Zeigen Sie, dass $v_p(g_i)$ und $v_p(h_j)$ nicht negativ sein können.

**Aufgabe 2.** *(10 Punkte)*
Beweisen Sie die Aussage von Lemma 14.2 der Vorlesung, d.h. die Äquivalenz von

(1) $\overline{K} \mid K$ ist algebraischer Abschluss von $K$;

(2) $\overline{K} \mid K$ ist maximal algebraisch;

(3) $\overline{K} \mid K$ ist minimal algebraisch abgeschlossen;

für eine Körpererweiterung $\overline{K} \mid K$.

**Aufgabe 3.** *(10 Punkte)*
Für welche Primzahlen $p$ zerfällt das Polynom $X^2 - X + 1$ über $\mathbb{F}_p$?

**Abgabe bis Donnerstag, den 28.01.2016**
**vor der Vorlesung in die Briefkästen**