Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

13. Übung zu Einführung in die Algebra und Zahlentheorie, WS 2015/2016

Aufgabe 1. *(10 + 5 + 5 = 20 Punkte)*
(i) Es sei $p \in \mathbb{P}$ und $f(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ mit

- $p \nmid a_n$;
- $p \mid a_i$ für $0 \leq i < n$;
- $p^2 \nmid a_0$.

Zeigen Sie, dass f als Polynom über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist.
(ii) Für einen beliebigen Körper K sei $f(X) \in K[X]$ irreduzibel über K.
Zeigen Sie, dass dann für alle $c \in K$ auch $f(X + c)$ irreduzibel ist.
(iii) Zeigen Sie, dass zu jeder Primzahl p das Polynom $X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1$ über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist.

Hinweis zu (i): Benutzen Sie, dass die Zerlegung in irreduzible Faktoren über $\mathbb{F}_p$ eindeutig ist.

Aufgabe 2. *(10 Punkte)*
Es sei K ein beliebiger Körper und L eine endliche Erweiterung vom Grad n.
Zu $\alpha \in L$ sei

$$\mu_\alpha : \begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & L \\ x & \longmapsto & \alpha \cdot x \end{array}$$

die Multiplikationsabbildung. Es handelt sich um eine K-lineare Abbildung (das brauchen Sie nicht zu zeigen).
Berechnen Sie (in Abhängigkeit von α) das charakteristische Polynom $\chi_{\mu_\alpha}(X)$ und das Minimalpolynom $p_{\mu_\alpha}(X)$ von μ_α.

Aufgabe 3. *(4 + 6 = 10 Punkte)*
Es sei $\eta \in \mathbb{C}$ eine primitive 8. Einheitswurzel.
(i) Berechnen Sie das Minimalpolynom $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ von η über $\mathbb{Q}$.
(ii) Bestimmen Sie die Faktorisierung von $f(X)$, betrachtet als Polynom in $\mathbb{F}_p[X]$, für $p = 3, 5, 7$.

Abgabe bis Donnerstag, den 04.02.2016
vor der Vorlesung in die Briefkästen