Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

2. Übung zu Einführung in die Algebra und Zahlentheorie, WS 2015/2016

Aufgabe 2. *(1 + 3 + 1 + 3 + 1 + 1 = 10 Punkte)*
Welche der nachfolgenden H_i sind normale Untergruppen im jeweils zugehörigen G_i?
Begründen Sie Ihre Antworten!
(Sie dürfen ohne weiteren Beweis verwenden, dass es sich in allen Fällen um Gruppen handelt.)

(*i*) $H_1 = \langle (1,3,2) \rangle$, $G_1 = S_3$;
(*ii*) $H_2 = H_1$, $G_2 = S_n$ mit $n \geq 4$;
(*iii*) $H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q},\, ac \neq 0 \right\}$, $G_3 = \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$;
(*iv*) $H_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Q} \right\}$, $G_4 = H_3$;
(*v*) $H_5 = H_4$, $G_5 = G_3$;
(*vi*) $H_6 = Z(G_6)$, G_6: beliebige Gruppe.

Aufgabe 2. *(10 Punkte)* **Klein'sche Vierergruppe**
Die Gruppe $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wird auch Klein'sche Vierergruppe genannt.
Finden Sie vier verschiedene Untergruppen von S_4, die alle zu G isomorph sind.
Welche dieser Gruppen sind zueinander konjugiert, welche sind normal in S_4?

Aufgabe 3. *(10 + 10 = 20 Punkte)*
Es sei G eine Gruppe und Aut(G) die Gruppe der Automorphismen von G.
Desweiteren sei $\mathrm{Inn}(G)$ die Gruppe der *inneren Automorphismen*, d.h. Automorphismen $\kappa_a : G \to G$ der Gestalt $g \mapsto aga^{-1}$ für ein $a \in G$.
(*i*) Zeigen Sie: $\mathrm{Inn}(G)$ ist eine normale Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$.
(*ii*) Bestimmen Sie für $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $G = S_3$ jeweils die inneren und alle Automorphismen, sowie den Quotienten $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$.

Abgabe bis Donnerstag, den 05.11.2015
vor der Vorlesung in die Briefkästen