



3. Übung zu Einführung in die Algebra und Zahlentheorie,
WS 2015/2016

Aufgabe 1. (3 + 2 + 10 = 15 Punkte)

Es sei X eine nichtleere Menge, auf der die Gruppe G_1 von links und G_2 von rechts operiert. Mit den üblichen Bezeichnungen sei $G_1 \backslash (X/G_2)$ die Menge der Bahnen von G_1 auf X/G_2 und $(G_1 \backslash X)/G_2$ die Menge der Bahnen von G_2 auf $G_1 \backslash X$.

Für $x, y \in X$ sei $x \underset{12}{\sim} y$ die Äquivalenzrelation: Die durch x und y bestimmten Elemente von $G_1 \backslash (X/G_2)$ stimmen überein.

(i) Geben Sie eine übersichtliche Beschreibung von " $\underset{12}{\sim}$ ".

(ii) Führen Sie entsprechende Überlegungen zu $(G_1 \backslash X)/G_2$ durch und zeigen Sie, dass dies auf dieselbe Äquivalenzrelation führt.

Dies erlaubt uns, die beiden Mengen $G_1 \backslash (X/G_2)$ und $(G_1 \backslash X)/G_2$ zu identifizieren und dafür nur $G_1 \backslash X/G_2$ zu schreiben.

(iii) Seien jetzt K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $G_1 = \text{GL}(m, K)$, $G_2 = \text{GL}(n, K)$, $X = K^{m \times n}$, worauf G_1 bzw. G_2 von links bzw. rechts durch Matrizenmultiplikation operieren. Geben Sie Repräsentantensysteme an für

- $G_1 \backslash X$;
- X/G_2 ;
- $G_1 \backslash X/G_2$.

Aufgabe 2. (3 + 6 + 6 = 15 Punkte)

Es sei $W = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ der Einheitswürfel mit Isometriegruppe $G := \{g \in \text{GL}(3, \mathbb{R}) \mid g(W) = W\}$ und $G_+ := \{g \in G \mid \det(g) = 1\}$.

(i) Wie viele Elemente haben G und G_+ ?

Eine k -Markierung von W ist die Auswahl einer Teilmenge S von W mit k Elementen.

Wie viele 3-Markierungen von W gibt es, die paarweise

(ii) unter G ;

(iii) unter G_+

inäquivalent sind? Geben Sie jeweils ein Repräsentantensystem an!

(iv) ★-Aufgabe außerhalb der Wertung:

Führen Sie dieselben Überlegungen durch für 4-Markierungen.

Was bedeutet es, dass die Menge der G -Bahnen nicht mehr mit der Menge der G_+ -Bahnen übereinstimmt?

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Es sei G eine Gruppe mit Zentrum $Z(G)$.

Zeigen Sie: Ist $G/Z(G)$ zyklisch, dann ist G abelsch.

**Abgabe bis Donnerstag, den 12.11.2015
vor der Vorlesung in die Briefkästen**