

Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp



4. Übung zu Einführung in die Algebra und Zahlentheorie,
WS 2015/2016

Aufgabe 1. (10 + 5 + 5 = 20 Punkte)

Es sei p eine Primzahl und G eine endliche p -Gruppe.

Zeigen Sie:

- (i) Jede Untergruppe H von G vom Index p ist normal;
- (ii) $\#\{x \in G \mid \text{ord}(x) = p\} \equiv -1 \pmod{p}$;
- (iii) $\#\{x \in G \mid \text{ord}(x) \geq p^2\} \equiv 0 \pmod{p}$.

Hinweis: Betrachten Sie Operationen von G auf geeigneten Mengen und zählen Sie Bahnen ab.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Welche der folgenden Gleichungen können nicht als Klassengleichung einer Gruppe G der Ordnung 10 auftreten?

$$\begin{array}{ll} 1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 10, & 1 + 2 + 2 + 5 = 10, \\ 1 + 2 + 3 + 4 = 10, & 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10. \end{array}$$

(Die aufgeführten Summanden sind die Größen der Konjugationsklassen von G .)
Geben Sie im positiven Fall Beispiele für solche Gruppen G .

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Konstruieren Sie für jede Primzahl p eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung p^3 .

Abgabe bis Donnerstag, den 19.11.2015
vor der Vorlesung in die Briefkästen