

Universität des Saarlandes  
Fachrichtung 6.1, Mathematik  
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler  
M.Sc. Philipp Stopp



4. Übung zu Einführung in die Algebra und Zahlentheorie,  
WS 2015/2016

**Aufgabe 1.** (10 + 5 + 5 = 20 Punkte)

Es sei  $p$  eine Primzahl und  $G$  eine endliche  $p$ -Gruppe.

Zeigen Sie:

- (i) Jede Untergruppe  $H$  von  $G$  vom Index  $p$  ist normal;
- (ii)  $\#\{x \in G \mid \text{ord}(x) = p\} \equiv -1 \pmod{p}$  ;
- (iii)  $\#\{x \in G \mid \text{ord}(x) \geq p^2\} \equiv 0 \pmod{p}$  .

Hinweis: Betrachten Sie Operationen von  $G$  auf geeigneten Mengen und zählen Sie Bahnen ab.

**Aufgabe 2.** (10 Punkte)

Welche der folgenden Gleichungen können nicht als Klassengleichung einer Gruppe  $G$  der Ordnung 10 auftreten?

$$\begin{array}{ll} 1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 10, & 1 + 2 + 2 + 5 = 10, \\ 1 + 2 + 3 + 4 = 10, & 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10. \end{array}$$

(Die aufgeführten Summanden sind die Größen der Konjugationsklassen von  $G$ .)  
Geben Sie im positiven Fall Beispiele für solche Gruppen  $G$ .

**Aufgabe 3.** (10 Punkte)

Konstruieren Sie für jede Primzahl  $p$  eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung  $p^3$ .

Abgabe bis Donnerstag, den 19.11.2015  
vor der Vorlesung in die Briefkästen