Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

8. Übung zu Einführung in die Algebra und Zahlentheorie, WS 2015/2016

Aufgabe 1. *(10 Punkte)*
Es sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben.
Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\sigma_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \sum_{t|n} t^k \end{array}$$

ist schwach multiplikativ.

Aufgabe 2. *(5 + 5 ·1 = 10 Punkte)*
(*i*) Ist $n^2 \equiv 1234 \bmod 1153$ lösbar? (*Hinweis:* 1153 ist eine Primzahl.)
(*ii*) Wieviele inkongruente Lösungen haben die Kongruenzen

- $n^2 \equiv 8 \bmod 17$;
- $n^2 \equiv 13 \bmod 35$;
- $n^2 \equiv 4 \bmod 15$;
- $n^2 \equiv 2 \bmod 6$;
- $n^2 \equiv 2 \bmod 14$?

Aufgabe 3. *(5 +5 +3 +7 = 20 Punkte)*
(i) Es seien $a, m \in \mathbb{N}$; $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$.
Zeigen Sie, dass es $x, y \in \mathbb{Z}$ gibt, mit

$$0 < x < \sqrt{m}\,,\ 0 < |y| < \sqrt{m}\,,$$

sodass

$$ax + y \equiv 0 \bmod m$$

gilt.
(*Hinweis:* Betrachten Sie für $0 \leq r < \sqrt{m}$ und $0 \leq s \leq \sqrt{m}$ die Werte von $ar + s$ modulo m und benutzen Sie das Schubfachprinzip.)
(ii) Es sei $p \neq 3$ eine Primzahl.
Zeigen Sie, dass es genau dann ein $a \in \mathbb{Z}$ mit

$$a^2 + 3 \equiv 0 \bmod 4p$$

gibt, wenn $p \equiv 1 \bmod 6$ gilt.
(iii) Zeigen Sie (mit Hilfe von (i)):
Ist $p \equiv 1 \bmod 6$ prim und a wie in Teil (ii), so gibt es $x, y \in \mathbb{N}$ mit

$$0 < x\,,\ y < \sqrt{p}\,,$$

sodass $a^2x^2 - y^2 \equiv 0 \bmod p$ gilt.
(iv) Zeigen Sie, dass für p, x, y wie in (iii) eine der Möglichkeiten

$$3x^2 + y^2 = 3p\,,\ 3x^2 + y^2 = 2p\,,\ 3x^2 + y^2 = 3p\,,$$

zutrifft und folgern Sie daraus, dass sich eine Primzahl $p > 3$ genau dann in der Form

$$p = u^2 + 3v^2$$

schreiben lässt, wenn $p \equiv 1 \bmod 6$ gilt.

Abgabe bis Donnerstag, den 17.12.2015
vor der Vorlesung in die Briefkästen