Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. Alice Keller

7. Übung zur elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, SS 04

Aufgabe 1:(*12 Punkte*) Sei P_λ die Poisson-Verteilung auf $\mathfrak{X} = \mathbb{N}_0$ mit

$$P_\lambda(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\ , \qquad \lambda \in \Theta = \mathbb{R}_{\geq 0}\ .$$

(i) Zeigen Sie: Der Schätzer

$$\begin{aligned}\hat{\lambda} : \mathbb{N}_0 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\mapsto\ \ x\end{aligned}$$

für λ ist erwartungstreu.

(ii) Beweisen oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel die folgende Aussage: Ist $g : \Theta \to \mathbb{R}$ eine zu schätzende Funktion für λ, so ist $\hat{g} := g \circ \hat{\lambda}$ ein erwartungstreuer Schätzer.

Aufgabe 2:(*8 Punkte*) Eine Urne enthält zehn rote, sechs blaue und vier gelbe Kugeln. Es werden jeweils drei Kugeln auf einmal gezogen, ihre Farbe betrachtet und dann werden die Kugeln zurückgelegt. Als Treffer gilt, wenn drei verschiedenfarbige Kugeln gezogen wurden.
Bestimmen Sie mit dem Gesetz der großen Zahlen die Zahl der Ziehungen so, daß die Wahrscheinlichkeit, im Mittel um mehr als $0,001$ vom Erwartungswert einer Ziehung abzuweichen, kleiner oder gleich $0,01$ ist.

Aufgabe 3:(*10 Punkte*) Ein Gerät enthält die störanfälligen Teile A_1, A_2 und B. Es funktioniert, wenn B und mindestens eines der Teile A_1, A_2 funktioniert. Aus Untersuchungen der einzelner Bauteile sind die Konfidenzintervalle für die Wahrscheinlichkeiten p_A und p_B bekannt, daß ein Teil vom Typ A bzw. B nach einem Jahr noch funktioniert. Unter der Annahme, daß Störungen in den Bauteilen unabhängig voneinander auftreten, leite man – notfalls zu einem kleineren Niveau – ein möglichst kleines Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit her, daß das Gerät nach einem Jahr noch funktioniert.

Aufgabe 4:(*10 Punkte*) **Nach der Wahl**
Nach Auszählung der ersten 500.000 Stimmen wird für die FDP ein Stimmenanteil von $5,2\%$ bekannt gegeben. Betrachten Sie die Wahl als Bernoulli-Experiment mit einer unbekannten Wahrscheinlichkeit p, jede Wählerstimme für die FDP als Treffer, schätzen Sie p durch die gegebenen Daten und benutzen sie das Gesetz der großen Zahlen, um ein Konfidenzintervall zur Wahrscheinlichkeit 99% für den Stimmenanteil der FDP anzugeben. Wie verändert sich das Intervall, wenn weitere 500.000 Stimmen ausgezählt werden?

Abgabe am 14.06.04 vor der Vorlesung