Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

12. Übung zu Kombinatorik und Graphentheorie, SS 2014

Aufgabe 1. *(10 Punkte)*
Es sei $f(X) = \sum_{i\geq 0} a_i X^i \in \mathbb{C}[[X]]$ mit $a_0 = 1$. Zeigen Sie die Identität

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\log f(X) = \frac{f'(X)}{f(X)}\,.$$

Hinweis: Reduzieren Sie die Aussage auf den Spezialfall von Polynomen $f(X)$ vom Grad $d \in \mathbb{N}$ und schließlich auf den Fall $d = 1$.

Aufgabe 2. *(15 = 2 + 5 + 8 Punkte)*
(*i*) Es sei $\sigma \in S_n$. Zeigen Sie, dass $\sigma^m = 1$ genau dann gilt, falls σ ein Produkt disjunkter Zykel ist, deren Zykel-Längen m teilen.
(*ii*) Sei $m \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Wir definieren $h(n) := |\{\sigma \in S_n : \sigma^m = 1\}|$ und $H(X) := \sum_{n\geq 0} h(n) \cdot \frac{X^n}{n!} \in \mathbb{C}[[X]]$. Zeigen Sie

$$H(X) = e^{\sum_{d|m} \frac{X^d}{d}}\,,$$

wobei die Summe im Exponent über alle positiven Teiler von m läuft.
(*iii*) Geben Sie eine Rekursion für $h(n)$ aus (*ii*) im Falle $m = 2, 3, 4$ an und berechnen Sie $h(n)$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ im Falle $m = 4$.

Aufgabe 3. *(15 = 10 + 5 Punkte)*
Es sei $h(n)$ die Anzahl der Permutationen σ aus S_n, welche aus einer geraden Anzahl disjunkter Zykel ungerader Länge bestehen. Zum Beispiel ist $h(4) = 9$ und $h(5) = 0$.
(*i*) Es sei $H(X) := \sum_{n\geq 0} h(n) \cdot \frac{X^n}{n!}$. Zeigen Sie:

$$H(X) = \frac{1}{\sqrt{1 - X^2}}\,.$$

(*ii*) Bestimmen Sie $h(n)$ explizit.

Hinweis zu (*ii*)*:* Benutzen Sie den verallgemeinerten Binomialsatz.

Abgabe am Donnerstag, den 10.07.2014 vor der Vorlesung