Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

6. Übung zu Kombinatorik und Graphentheorie, SS 2014

Aufgabe 1. *(10 Punkte)*
Beweisen Sie mittels einer Bijektion:
$(2^k-1)^n$ ist die Zahl der k-gliedrigen Folgen $S_1, S_2, \ldots, S_k$ von Teilmengen von $\mathbb{N}_n$ mit

$$S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_k = \emptyset\,.$$

Aufgabe 2. *(30 Punkte)*
(i) Es sei $(X, \leq)$ eine endliche Menge versehen mit einer geeigneten Ordnungsrelation. Weisen Sie die Existenz einer verallgemeinerten Möbius-Funktion $\mu(S,T)$ auf $X \times X$ nach. D.h. $\mu(S,T)$ erfüllt die Inversionsformel

$$f(S) = \sum_{T \leq S} \mu(S,T)\hat{f}(T)$$

mit $\hat{f}(S) = \sum_{T \leq S} f(T)$ für beliebige $f : X \to \mathbb{C}$.
(ii) Inwiefern lässt sich die Aussage aus (i) verallgemeinern?
(iii) Betrachten Sie nun $(\mathfrak{A}, \leq)$, die Menge der Isomorphieklassen endlicher abelscher Gruppen mit der von der Inklusion induzierten Ordnung.
Zeigen Sie, dass in dieser Situation gilt:

- Es ist $\mu(S,T) = \mu({}^{S}\!/\!{}_{T})$ und $\mu(S,T) = 0$, falls $T \not\subset S$. Dabei ist $\mu(A) = \prod \mu(A_i)$, mit der Zerlegung
  $A = \prod A_i$ in primäre Komponenten.
- $\mu(A) = \begin{cases} 0 & , A \text{ nicht elementar,} \\ (-1)^k p^{\binom{k}{2}} & , A \cong ({}^{\mathbb{Z}}\!/\!{}_{p})^k\,,\, A \text{ eine } p-\text{Gruppe}\,. \end{cases}$

Hinweise zu (iii): Zeigen Sie:

- $\mu(S,T)$ hängt nur von ${}^{S}\!/\!{}_{T}$ ab.
- das Problem ist "multiplikativ"; gilt die Behauptung für endliche abelsche $p-$Gruppen, so schon für beliebige endliche abelsche Gruppen.

Abgabe am Freitag, den 30.06.2014 bis 12:00 Uhr ins Postfach Gekeler (ausnahmsweise)