Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

8. Übung zu Kombinatorik und Graphentheorie, SS 2014

Aufgabe 1. *(15 Punkte)*
Eine Topologie auf einer Menge X ist eine Teilmenge $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ mit den Eigenschaften:
(i) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$;
(ii) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$;
(iii) Ist I eine Indexmenge, und sind U_i $(i \in I)$ Elemente von τ, so ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ Element von τ.
Die Elemente von τ heißen die offenen Mengen der Topologie τ; die Komplemente von offenen Mengen heißen abgeschlossen. Sei X eine nichtleere endliche Menge. Beschreiben Sie eine Bijektion zwischen der Menge der Topologien und der Menge der t-Relationen auf X.

Aufgabe 2. *(15 Punkte)*
Eine Teilmenge Σ der Potenzmenge einer endlichen (!) Menge X heißt eine *Algebra auf* X, falls gilt:

- $X, \emptyset \in \Sigma$,
- $A, B \in \Sigma \Rightarrow X \setminus A,\ A \cup B \in \Sigma$.

(i) Beschreiben Sie 5 verschiedene Algebren auf $\mathbb{N}_4$.
(ii) Zeigen Sie: Die Anzahl der Algebren auf $\mathbb{N}_n$ ist gleich der n-ten Bell-Zahl $B(n)$.

Aufgabe 3. *(10 Punkte)*
Zeigen Sie: Die Anzahl der Partitionen von $n \geq 2$ in Potenzen von 2 ist gerade. Zum Beispiel ist für $4 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$ diese Zahl gleich 4, also gerade.

Abgabe am Donnerstag, den 12.06.2014 vor der Vorlesung