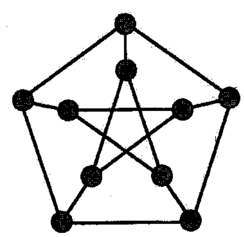
Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

9. Übung zu Kombinatorik und Graphentheorie, SS 2014

Aufgabe 1. *(8 Punkte)*
Die *zentrierten Sechseckzahlen* $h(n) := 1 + 6 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$, lassen sich durch sechseckige Anordnungen von $h(n)$ vielen Punkten veranschaulichen.
Zeigen Sie: Es ist nur für $n = 0$ oder 2 möglich, die ersten $h(n)$ natürlichen Zahlen wie beschrieben zu ordnen, sodass die Summen aller Reihen in den drei Richtungen gleich sind.

Hinweis: Es ist $38 = 3 + 7 + 5 + 8 + 15 = 16 + 2 + 5 + 6 + 9$.

Aufgabe 2. *(15 Punkte)*
Untersuchen Sie den folgenden Graphen G, ob er einen Euler-Weg oder einen Hamilton-Zykel besitzt:



Beschreiben Sie die Automorphismengruppe von G.

Aufgabe 3. *(7 + 10 = 17 Punkte)*
Ein Graph G heißt *planar*, wenn er eine überschneidungsfreie Einbettung nach $\mathbb{R}^2$ besitzt. Das Bild nennt man einen *ebenen Graphen*; dieser zerlegt die Ebene in zusammenhängende *Gebiete*.
(i) Zeigen Sie: Für jeden zusammenhängenden, ebenen Graphen G mit n Knoten, e Kanten und f Gebieten gilt:

$$n - e + f = 2\,.$$

(ii) Es nun $n > 2$. Zeigen Sie dass für ebene Graphen G gilt:
- G hat eine Ecke vom Grad höchstens 5,
- G hat höchstens $3n - 6$ viele Kanten.

*Hinweis zu (*ii*):* Zählen Sie die Knoten anhand ihres Grades, bzw. die Gebiete anhand der Anzahl an Kanten, die sie begrenzen.

Abgabe am Freitag, den 20.06.2014 bis 12:00 Uhr
ins Postfach Gekeler (ausnahmsweise)