Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Bernd Mehnert

Übung 13

Aufgabe 1. *(10 Punkte)* Es sei $m \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Wir setzen $\tau_m(0) := 1$ und für $n \in \mathbb{N}$ vereinbaren wir $\tau_m(n) := |\{\sigma \in S_n : \sigma^m = 1\}|$. Beweisen Sie die formale Potenzreihenidentiät

$$\sum_{n \geq 0} \tau_m(n) \frac{X^n}{n!} = \exp\left(\sum_{d|m} \frac{X^d}{d} \right)$$

und zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die folgende Rekursion:

$$\tau_m(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|m} (n)_d \tau_m(n-d) \ .$$

(Hinweis: Nutzen Sie die Theorie in Kapitel 11)

Aufgabe 2. *(10 Punkte)* Für $n \in \mathbb{N}$ sei $t_2(n)$ die Anzahl der Graphen auf $\mathbb{N}_n$, die an jedem Knoten den Grad 2 besitzen. Z.B. ist $t_2(1) = t_2(2) = 0$ und $t_2(3) = 1$. Wir setzen noch $t_2(0) := 1$. Beweisen Sie die formale Potenzreihenidentität

$$\sum_{n \geq 0} t_2(n) \frac{X^n}{n!} = \frac{\exp\left(-\frac{X}{2} - \frac{X^2}{4}\right)}{\sqrt{1-X}}$$

und geben Sie eine Rekursion für $t_2(n)$ an.

Aufgabe 3. *(10 Punkte)* Geben Sie 5 weitere (, d.h. nicht in der Vorlesung, oder in dieser Übung diskutierte) Beispiele an, wo man die in Kapitel 11 aufgeführte Theorie einsetzen kann.

Aufgabe 4. *(10 Punkte)* Es sei $T \subset \mathbb{R}^3$ ein Tetraeder positiver Seitenlänge, dessen Schwerpunkt im Koordinatenursprung liege.

a) Bestimmen Sie die Gruppe G der (orientierungserhaltenden) Bewegungen des $\mathbb{R}^3$, die die Punktmenge T wieder in sich überführt, d.h. bestimmen Sie die Fixgruppe von T unter der Operation der Gruppe $SO(3) := \{A \in GL(3, \mathbb{R}) : A^t A = I, \det(A) = 1\}$.

b) Nummerieren wir die 6 Kanten von T mit den Zahlen aus $\mathbb{N}_6$, so operiert G in natürlicher Weise auf der (endlichen) Menge M der Abbildungen $\mathbb{N}_6 \to \mathbb{N}_2$. Wieviele Bahnen besitzt M unter der Operation von G?

Abgabe: Donnerstag den 01.02.2007 (vor der Vorlesung)
Homepage: http://www.math.uni-sb.de/ag/gekeler/LEHRE/Kombinatorik/KombinatorikWS06.html