Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Bernd Mehnert

Übung 5

Aufgabe 1. *(5+4+7=16 Punkte)*

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie

$$\sum_{2|k} \binom{n}{k} = \sum_{2\nmid k} \binom{n}{k}$$

durch

i) Verwendung des Binomialsatzes (Satz 4.8.),

ii) durch Konstruktion einer Bijektion zwischen $\{A \subset \mathbb{N}_n : |A| \text{ gerade}\}$ und $\{B \subset \mathbb{N}_n : |B| \text{ ungerade}\}$.

b) Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $X := \{(x, y, z) \in \mathbb{N}_{m+1}^3 : z > \max\{x, y\}\}$. Zählen Sie die Anzahl der Elemente von X auf zwei Weisen:

i) Ermitteln Sie für jedes $k \in \mathbb{N}_{m+1}$ die Anzahl der Tupel (x, y, z) aus X mit $z = k$ und summieren Sie diese Zahlen auf.

ii) Zählen Sie die Tupel (x, y, z) aus X in den Fällen, in denen $x = y < z, x < y < z$ und $y < x < z$ gilt und summieren Sie ihre Ergebnisse auf.

Was für eine Identität erhalten Sie?

c) Bestimmen Sie für $s, n \in \mathbb{N}$ mit $s \leq n$

$$\sum_{s \leq k \leq n} \binom{k}{s} \binom{n}{k} k\,.$$

(Hinweis: Interpretieren Sie die Summe als die Ordnung einer geeigneten Menge und ermitteln Sie die Ordnung dieser Menge erneut)

Aufgabe 2. *(7+7=14 Punkte)* Da die Multiplikation von Zahlen eine binäre Operation ist, müssen wir zwangsläufig $n-2$ mal klammern um ein Produkt $a_1a_2a_3...a_n$ mit $n \geq 2$ auszurechnen. Die Anzahl der verschiedenen möglichen Klammerungen sei mit $f(n)$ bezeichnet. Z.B. gilt $f(2) = 1$ und wegen $a_1a_2a_3 = (a_1a_2)a_3 = a_1(a_2a_3)$ ist $f(3) = 2$. Außerdem gilt $f(4) = 5$, denn alle möglichen Klammerungen von $a_1a_2a_3a_4$ sind $a_1((a_2a_3)a_4) = a_1(a_2(a_3a_4)) = (a_1a_2)(a_3a_4) = ((a_1a_2)a_3)a_4 = (a_1(a_2a_3))a_4$. Wir vereinbaren noch $f(1) = 1$.
Betrachten Sie nun die erzeugende Funktion

$$F(X) := \sum_{n\geq 1} f(n)X^n \in \mathbb{C}[[X]]$$

von $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \subset \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie: Es gilt die formale Potenzreihenidentität

$$F(X) = X + F(X)^2 \,.$$

b) Verschaffen Sie sich mit Hilfe von a) eine "explizite" Formel für $F(X)$ und bestimmen Sie die Koeffizienten $f(n)$ von $F(X)$ erneut. Was für eine Formel für $f(n)$ erhalten Sie?

Aufgabe 3. *(10 Punkte)* Wieviele Zahlen aus $\mathbb{N}_{10000}$ sind nicht durch 7,9,15 oder 21 teilbar?

Abgabe: Donnerstag, den 23. November 2006 (vor der Vorlesung)
Homepage: http://www.math.uni-sb.de/ag/gekeler/LEHRE/Kombinatorik/KombinatorikWS06.html