Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Bernd Mehnert

Übung 9

Aufgabe 1. *(3+12=15 Punkte)*

a) Beweisen Sie die formale Potenzreihenidentität

$$\sum_{n\geq 0}\frac{X^n}{(X)_n}=\prod_{i=1}^{\infty}(1-X^i)^{-1}\,.$$

b) Man sagt, eine Partition $(a_1, a_2, a_3, ...)$ (mit $a_1 \geq a_2 \geq ...$) einer natürlichen Zahl besitze ein *Durfee-Quadrat* der Seitenlänge $m \in \mathbb{N}_0$, falls m maximal ist mit $a_i \geq m$ für $i = 1, ..., m$. Es bezeichne $p_{Durfee}(n, m)$ die Anzahl der Partitionen der Zahl n mit Durfee-Quadrat der Seitenlänge m. (Z.B. besitzt $(2, 2, 1, 1, 1)$ ein Durfee-Quadrat der Seitenlänge 2 und $(6, 5, 4, 3, 2, 1)$ eines der Seitenlänge 3)

i) Beweisen Sie: Setzen wir zusätzlich $p_{Durfee}(0, 0) = 1$, so gilt die Identität

$$\frac{X^{m^2}}{(X)_m^2}=\sum_{n\geq 0}p_{Durfee}(n,m)X^n\,.$$

ii) Folgern Sie:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{X^{n^2}}{(X)_n^2}=\prod_{i=1}^{\infty}(1-X^i)^{-1}\,.$$

Aufgabe 2. *(12 Punkte)* Zeigen Sie, dass die Anzahl der Partitionen einer Zahl $n > 1$ in reine Potenzen von 2 stets gerade ist, d.h. zeigen Sie die Kongruenz

$$p(n, S) \equiv 0 \bmod 2$$

für $n > 1$ und $S = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$.
(Hinweis: Eine Möglichkeit, um diese Aussage zu beweisen, ist die Folgende:

a) Betrachten Sie die erzeugende Funktion

$$F=\sum_{n\geq 0}p(n,S)X^n$$

und ihre Produktdarstellung gemäß Korollar 8.19.

b) Untersuchen Sie Ihre Reihe aus a) bezüglich der Reduktion nach einer geeigneten Primzahl! Ist $p \in \mathbb{P}$ fest gewählt und ist $\sum_{n\geq 0}\overline{a_n}X^n$ das Bild von $\sum_{n\geq 0}a_nX^n$ aus $\mathbb{Z}[[X]]$ unter der natürlichen Abbildung $\mathbb{Z}[[X]] \to \mathbb{F}_p[[X]]$, was ist dann $\left(\sum_{n\geq 0}\overline{a_n}X^n\right)^{p^k}$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$?)

Aufgabe 3. *(10 Punkte)* Bestimmen Sie die Anzahl der abelschen Gruppen der Ordnung 1024.

Aufgabe 4. *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass für $n > 1$ die Anzahl der *nichttrivialen Involutionen* von S_n, d.h. die Anzahl der $\sigma \in S_n$ mit $\sigma^2 = 1$ und $\sigma \neq 1$ stets ungerade ist.

Abgabe: Donnerstag, den 21. Dezember 2006 (vor der Vorlesung)
Homepage: http://www.math.uni-sb.de/ag/gekeler/LEHRE/Kombinatorik/KombinatorikWS06.html