Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 8 der Vorlesung:

- **Zur Aufgabe 1**: Gesucht ist die Anzahl der $m-$Tupel $(a_1, a_2, a_3, ..., a_m)$ nichtnegativer ganzer Zahlen a_i mit $2 \nmid a_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_m$ und $\sum_i a_i = n$. Diese stehen offenbar vermöge der Abbildung
$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_m) \mapsto \left(\frac{a_1 - 1}{2}, \frac{a_2 - 1}{2}, ..., \frac{a_m - 1}{2}\right)$$
in Bijektion zu den Tupeln $(b_1, b_2, ..., b_m)$ nichtnegativer ganzer Zahlen mit $\sum_i b_i = \frac{n-m}{2}$. Damit ist nach dem "zwölffachen Weg" die gesuchte Anzahl gleich $\binom{\frac{n-m}{2} + m - 1}{\frac{n-m}{2}} = \binom{\frac{n+m}{2} - 1}{\frac{n-m}{2}}$ oder 0, je nachdem ob $n \equiv m \pmod 2$ gilt oder nicht.

- **Zur Aufgabe 2:** Es soll eine Bijektion zwischen den transitiven und reflexiven Relationen R und den Topologien T auf einer endlichen Menge X angegeben werden.
Für eine Relation R wie oben lassen wir T_R das Erzeugnis der Mengen $x_R := \{y : yRx\}$ mit $x \in X$ sein. D.h. T_R sei der Schnitt aller Topologien auf X, die alle Mengen x_R enthalten. Offenbar gilt $T_R = \{A \subset X : x \in A \text{ und } yRx \Rightarrow y \in A\}$ (Achtung! Hier geht die Transitivität von R mit ein). (Beispiele:

    - Für für $X = \{1, 2, 3\}$ und $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ ist T_R das Erzeugnis der Mengen $1_R = \{1\}, 2_R = \{2\}$ und $3_R = \{3\}$, d.h. $T_R = \mathfrak{P}(X)$. Wählen wir aber $R := X \times X$, so ist offenbar $T_R = \{\emptyset, X\}$.
    - Fordern wir nicht die Transitivität von R, so ist unsere Abbildung $R \mapsto T_R$ i.A. **nicht** injektiv! Wähle z.B. wieder $X := \{1, 2, 3\}$ und jetzt $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$. Dann ist T_R das Erzeugnis von $1_R = \{1, 3\}, 2_R = \{1, 2\}, 3_R = \{2, 3\}$. Offenbar enthält T_R dann $1_R \cap 2_R = \{1\}, 1_R \cap 3_R = \{3\}$ und $2_R \cap 3_R = \{2\}$, ist also gleich $T_{\{(1,1),(2,2),(3,3)\}} = \mathfrak{P}(X)$.)

  Jedenfalls, in der Situation der Aufgabe ist die Abbildung $R \mapsto T_R$ injektiv: Nehmen wir an, es gelte $T_R = T_{R'}$ für zwei Relationen R, R'. Für alle $x \in X$ muss $x_R = x_{R'}$ sein, denn x_R (bzw. $x_{R'}$) ist offenbar die (!) kleinste Menge in T_R (bzw. in $T_{R'}$), die x enthält. D.h. es gilt $R = R'$.

  Wenn man sich nun für gegebene Relationen die zugehörigen Topologien hinschreibt und sich anschaut, wie man daraus wieder die Relation zurückgewinnt, ergibt das eine Anleitung, wie man allgemein aus einer Topologie T auf X eine Relation R_T auf X konstruieren kann: Man definiert für alle $x, y \in X$
$$yR_Tx :\Leftrightarrow y \in \cap_{x \in A, A \in T} A \ .$$
  R_T ist, wie man nachrechnet, wieder reflexiv und transitiv. D.h. unsere Abbildung $R \mapsto T_R$ ist sogar bijektiv (sie besitzt, wie man sich überlegt, $T \mapsto R_T$ als Inverse). Damit sind wir fertig.

- **Zur Aufgabe 3:** Wir haben eine endliche Menge X mit $|X| = m$ und sollen zunächst die Anzahl der Algebren auf X zählen.
  Wir zählen die Algebren auf X, indem wir jeder solchen Algebra ein eindeutiges Erzeugendensystem zuordnen und diese Erzeugendensysteme zählen. Es gilt:
  Zu jeder Algebra Σ auf X gibt es genau eine disjunkte Zerlegung $\dot\bigcup S_i = X$ von X in endlich viele disjunkte, nichtleere Teilmengen S_i, so dass Σ gerade das Erzeugnis der Mengen S_i ist.
  (Eine sofortige Konsequenz dieser Behauptung ist natürlich, dass unsere gesuchte Anzahl von Algebren auf X gleich der $m-$ten Bell-Zahl $B(m)$ ist!)
  Beweis der Behauptung: Zur Eindeutigkeit der Zerlegung: Haben wir eine Algebra Σ und zwei Zerlegungen $\dot\bigcup S_i = \dot\bigcup S'_j = X$ von X wie in unserer Behauptung, so darf keiner der Schnitte $S_i \cap S'_j$ nichttrivial sein, d.h. ungleich $\emptyset$ und echt kleiner als S_i oder S'_j sein, denn sonst wäre das Erzeugnis der $S_i \cap S'_j$ eine "feinere" Algebra als Σ (insbesondere also ungleich Σ), was nicht sein darf.
  Zur Existenz so einer Zerlegung: Für eine Algebra Σ, für $A, B \in \Sigma$ und $B \subset A$ ist $A - B \in \Sigma$. Insbes. ist $A = B \dot\cup (A - B)$. Deshalb dürfte es klar sein, dass man wegen $|X| < \infty$ den Raum X nach und nach in nichtleere, paarweise disjunkte Mengen aus Σ zerlegen kann, die ihrerseits nicht weiter zerlegbar sind. Dies muss eine Zerlegung wie in der Behauptung ergeben.

  Jetzt war noch gefordert, die Anzahl der Isomorphieklassen von Algebren auf X zu zählen. Zwei Algebren sind offenbar genau dann isomorph, falls ihre zugehörigen Zerlegungen von X unter der Operation von S_m ineinander überführt werden können. Mit anderen Worten: Die Anzahl der Isomorphieklassen von Algebren auf X ist gleich der Anzahl $p(m)$ der Partitionen der Zahl m.

- **Zur Aufgabe 4:** Es sollte gezeigt werden, dass die Anzahl der Partitionen einer Zahl n mit genau k Summanden gleich der Anzahl der Partitionen von $n + \binom{k}{2}$ in genau k verschiedene Summanden ist.
  Wir geben eine Bijektion zwischen den Mengen
  $$\begin{aligned} A: &= \{(a_1, a_2, ..., a_k) : a_i \in \mathbb{N}, a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_k \text{ und } \sum a_i = n\} \text{ und} \\ B: &= \left\{(b_1, b_2, ..., b_k) : b_i \in \mathbb{N}, b_1 > b_2 > ... > b_k \text{ und } \sum b_i = n + \binom{k}{2}\right\} \end{aligned}$$
  an. Betrachte die Abbildung $A \to B$ gegeben durch
  $$(a_1, a_2, ..., a_k) \mapsto (a_1 + k, a_2 + (k-1), ..., a_k + 0) .$$
  Offensichtlich ist das eine solche Bijektion. Damit folgt die Behauptung der Aufgabe.

- **Hinweis: Bei noch ausbleibenden Fragen zu den Aufgaben können Sie Herrn Metzner in der Übung oder mich (Zimmer 217) ansprechen.**