Prof. Dr. E.-U. Gekeler
FR 6.1 - Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 15 11 50
D-66041 Saarbrücken 28. Juni 2000

Multiple-Choice-Test

zur

Linearen Algebra I, II

Zu jedem angeführten Stichwort sind einige Aussagen *richtig*, einige *falsch* (siehe Antwortblatt). Auch *fast richtig* ist *falsch*. Prüfen Sie deshalb immer genau die Voraussetzungen, unter denen die Aussage gelten soll. Sie sollten dann annähernd 100% Treffer erzielen.

1. Mengen:

Die Mengen X und Y sind endliche Mengen, $\#(X) = m$, $\#(Y) = n$, $m, n \geq 1$. Die Menge $\{f | f$ Abbildung von X nach $Y\}$ hat
(a) $m \cdot n$
(b) m^n
(c) n^m
Elemente.

Die Menge $\mathcal{P}(X)$ hat
(d) $m!$
(e) 2^m
Elemente.

Die Menge der Permutationen von X hat
(f) $m!$
(g) 2^m
Elemente.

(h) $\emptyset \subset (X \cap Y)$
(i) $\#(X \dot\cup Y) = m \cdot n$

2. Abbildungen:

$f: X \longrightarrow Y$ ist eine Abbildung, $U \subset X$ und $V \subset Y$ Teilmengen.

(a) f surjektiv $\Rightarrow f|_U$ surjektiv.
(b) f injektiv $\Rightarrow f|_U$ injektiv.

f surjektiv $\Rightarrow \exists\, g: Y \longrightarrow X$ mit
(c) $g \circ f = \mathrm{id}_Y$
(d) $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(e) $f|_{f^{-1}(V)}: f^{-1}(V) \longrightarrow V$ ist surjektiv.

3. Relationen:

Die Relation aRb auf der Menge X ist für
(a) $aRb :\Leftrightarrow a|b$, $X := \mathbb{N}$, eine Ordnungsrelation;
(b) $aRb :\Leftrightarrow a|b$, $X := \mathbb{Z}$, eine Ordnungsrelation;
(c) $URV :\Leftrightarrow U \subset V$, $X := \mathcal{P}(M)$, M beliebige Menge, eine Ordnungsrelation;
(d) $aRb :\Leftrightarrow \frac{a}{b}$ Quadrat, $X = \mathbb{Q}^*$, eine Äquivalenzrelation;
(e) $aRb :\Leftrightarrow a - b$ Quadrat, $X = \mathbb{R}$, eine Äquivalenzrelation;
(f) $aRb :\Leftrightarrow a - b$ Quadrat, $X = \mathbb{R}$, eine Ordnungsrelation.

4. Gruppen:

Die Menge $Abb(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ der Abbildungen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ ist Gruppe bzgl.
(a) der Komposition
(b) der Addition.

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Es ist
(c) $\emptyset$
(d) $\{x \in G \mid x^n = 1_G\}$ ($n \in \mathbb{N}$ fest)
(e) Ker f ($f: G \longrightarrow H$ Gruppenhomomorphismus)
eine Untergruppe von G.

(f) Zu jeder Untergruppe U von G existiert ein Gruppenhomomorphismus $f: G \longrightarrow H$ mit Ker $f = U$.
(g) $x \longmapsto x^{-1}$ ist ein Automorphismus von G.

5. Ringe:

Folgende Mengen X mit den angegebenen Verknüpfungen sind Ringe:
(a) $X = (\mathbb{N}_0, +, \cdot)$;
(b) M Menge, $X := \mathcal{P}(M)$ mit

$$\begin{aligned} U + V &:= (U \cup V) - (U \cap V) \\ U \cdot V &:= U \cap V; \end{aligned}$$

(c) A abelsche Gruppe, $X := (\mathrm{End}(A), +, \circ)$;

(d) $(G,\cdot)$ Gruppe, $X := \mathbb{Z}^G := \{a = (a_s)_{s\in G} \mid a_s \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{array}{lcl} a+b & := & (a_s+b_s)_{s\in G} \\ a\cdot b & := & c = (c_s)_{s\in G},\ c_s = \sum\limits_{\substack{r,t\in G \\ r\cdot t = s}} a_r b_t; \end{array}$$

(e) $(X,+)$ wie in (d), aber $a\cdot b = c$ mit $c_s = a_s \cdot b_s$.

6. Körper:

Die folgenden Ringe sind Körper:
(a) $\mathbb{Z}/691\,\mathbb{Z}$;
(b) $\mathbb{F}_7[X]/(X^3-6) \quad (\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$;
(c) $\{\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})\}$.

7. Vektorräume und Basen:

K ist ein Körper und V ein K-Vektorraum.
Ist $V = \{0\}$, so
(a) ist $\{0\}$ Basis von V;
(b) ist $\emptyset$ Basis von V;
(c) besitzt V keine Basis.

(d) $B \subset V$ ist Basis $\Leftrightarrow$ B ist linear unabhängig, und für alle $v \in V$ ist $B \cup \{v\}$ linear abhängig.
(e) Sind B_1 und B_2 Basen von V, so gilt für jede Abbildung $f:\ B_1 \longrightarrow B_2$: f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv.

8. Unterräume:

Es sei V ein K-Vektorraum und $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Unterräume.
(a) $\bigcap U_i$ ist Unterraum.
(b) $(i \le j \Rightarrow U_i \subset U_j) \Rightarrow \bigcup U_i$ Unterraum.

Seien $V_1 \subset V$ und $W_1 \subset W$ Unterräume. Dann ist
(c) $\{f \in \mathrm{Hom}_K(V,W) \mid \mathrm{Bild} f \subset W_1\}$;
(d) $\{f \in \mathrm{Hom}_K(V,W) \mid \mathrm{Ker} f \subset V_1\}$
Unterraum von $\mathrm{Hom}_K(V,W)$.

(e) $\dim V \le 1 \Leftrightarrow V$ besitzt nur endlich viele Unterräume.

9. Homomorphismen:

V und W sind K-Vektorräume, $H := \mathrm{Hom}_K(V,W)$.

(a) H ist bzgl. argumentweiser Operationen ein K-Vektorraum.
(b) $H_0 := \{f \in H \mid \mathrm{Bild}(f)$ hat endliche Dimension$\}$ ist ein

Unterraum von H.
(c) $(H, +, \circ)$ mit "$\circ$" = Kompositum ist ein Ring.
(d) Jedes Element von H kann durch eine Matrix beschrieben werden.
(e) Für den Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ von V gilt $\dim V = \dim V^*$.

10. Matrizen:

(a) $\mathrm{Mat}(m \times n, K)$ ist Gruppe unter der Matrizenmultiplikation.

Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ mit Zeilenrang $r(A)$ und Spaltenrang $s(A)$.
(b) Ist $m \leq n$, so $r(A) \leq s(A)$.
(c) Ist $m < n$, so $r(A) < s(A)$.
(d) Es ist immer $r(A) = s(A)$.

11. Matrizen und Rang:

Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ vom Rang r. Gilt
(a) $m \leq n$, so existiert eine Rechtsinverse von A;
(b) $m \leq n$, so existiert eine Linksinverse von A;
(c) $r \geq n \Rightarrow \exists$ Rechtsinverse von A
(d) $r \geq n \Rightarrow \exists$ Linksinverse von A
(e) $r \geq m \Rightarrow \exists$ Rechtsinverse von A
(f) $r \geq m \Rightarrow \exists$ Linksinverse von A.
(Eine Rechts- bzw. Linksinverse von A ist $B \in \mathrm{Mat}(n \times m, K)$ mit $AB = I_m$ bzw. $BA = I_n$.)

12. Lineare Gleichungssysteme:

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $b \in K^m$. Das Gleichungssystem in n Unbestimmten $Ax = b \quad (x = (x_1, \ldots, x_n)^t)$ hat
(a) eine eindeutige Lösung, wenn $m = n$;
(b) eine Lösungsmenge der Dimension $n - m$, wenn $n \geq m$;
(c) keine Lösung, wenn $\mathrm{rg}(A) < m$.

13. Invertierbarkeit:

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$. A ist invertierbar, wenn sie
(a) Dreiecksmatrix $\quad (a_{ij} = 0$ für $i > j)$
(b) diagonalisierbar
(c) nilpotent
(d) unipotent
ist.

(e) A nilpotent $\Rightarrow A$ nicht invertierbar.

14. Konjugation von Matrizen:

A und $B \in \mathrm{Mat}(n, K)$ sind konjugiert genau dann,
(a) wenn eine invertierbare Matrix C existiert mit $B = CAC^t$;

wenn A und B
(b) denselben Endomorphismus $f: K^n \longrightarrow K^n$
(c) dieselbe Bilinearform $\beta: K^n \times K^n \longrightarrow K$
bzgl. je einer Basis von K^n beschreiben.

15. Determinanten:

A und $A' \in \mathrm{Mat}(n, K)$ gehen durch elementare Umformungen auseinander hervor.

(a) $\det A = 0 \Leftrightarrow \det A' = 0$
(b) $\det A = \det A'$
(c) $\det: A \longmapsto \det A$ definiert einen Gruppenhomomorphismus von $\mathrm{GL}(n, K)$ nach $(K, +)$.
(d) $\det A = \det(A^t) \quad (A^t =$ transponierte Matrix$)$
(e) $\det(tA) = t \cdot \det A \quad (t \in K)$

Sei A_{ij} die (i, j)-te Streichungsmatrix von A.
(f) $\det A = \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad (1 \leq j \leq n)$
(g) $A \cdot \tilde{A} = (\det A) I_n$, $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$, $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$
(h) $M = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ Kästchenmatrix mit $0 =$ Nullmatrix $\Rightarrow \det M = \det A \cdot \det D$.

16. Eigenwerte und Eigenvektoren:

f und g sind Endomorphismen des K-Vektorraums V, $\dim V = n$.

(a) $0 \neq v \in V$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \Rightarrow v \in \mathrm{Ker}\ (\lambda \cdot \mathrm{id}_V)$.
(b) f diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Summe der geom. Vielfachheiten der Eigenwerte von f ist n.
(c) f diagonalisierbar $\Leftrightarrow f$ hat n verschiedene Eigenwerte.
(d) f invertierbar mit Eigenwert $\lambda \Rightarrow \lambda^{-1}$ Eigenwert von f^{-1}.

Es existiere $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ mit $f = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$. Dann haben f und g dieselben
(e) Eigenwerte
(f) Eigenvektoren
(g) Eigenräume.

17. Polynome:

K sei ein Körper, $K[X]$ der Polynomring und $f \in K[X]$ vom Grad $d \geq 1$.

(a) $f(a) = 0 \quad \forall a \in K \Rightarrow f = 0$
(b) f hat $d+1$ Nullstellen $\Rightarrow f = 0$
(c) f hat mindestens eine Nullstelle in K.
(d) $K[X]$ ist ein Ring bzgl. "+" und "$\circ$", wobei

$$(f \circ g)(X) := f(g(X)) \quad \text{(einsetzen)}.$$

(e) Ist $K = \mathbb{R}$ und d ungerade, so hat f eine Nullstelle in K.

18. Charakteristisches Polynom:

$A, B \in \mathrm{Mat}(n, K)$ mit charakteristischen Polynomen P_A, P_B.

Es gilt $P_A = P_B$, falls ein $C \in \mathrm{GL}(n, K)$ existiert mit
(a) $A = CBC^t$
(b) $A = CBC^{-1}$.

(c) Die Nullstellen von $P_A(X)$ sind Eigenwerte von A.
(d) Es gibt Eigenwerte von A, die keine Nullstellen von P_A sind.
(e) Geom. Vielfachheit von λ als Eigenwert von $A \leq$ Vielfachheit von λ als Nullstelle von P_A.

19. Skalarprodukte:

"$\langle .,. \rangle$" sei ein Skalarprodukt auf dem nicht notwendig endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum $V, \mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(a) $\langle .,. \rangle$ ist bilinear, symmetrisch und positiv definit.
(b) Für jeden Unterraum U von V gilt $V = U \oplus U^\perp$.
(c) Für $x, y \in V$ gilt $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$.
(d) $\langle f, g \rangle := \displaystyle\int_0^1 |f(x)g(x)| dx$ definiert ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen auf $[0, 1]$.

20. Euklidische Vektorräume:

V sei ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$.

Für $0 \neq v \in V$ ist
(a) die Spiegelung σ_v an v
(b) die Projektion π_v auf v
eine orthogonale Abbildung.
(c) $g \in \mathrm{GL}(V)$ ist orthogonal $\Leftrightarrow \forall x \in V$ ist $\|g(x)\| = \|x\|$.

Die Teilmenge der
(d) orthogonalen
(e) selbstadjungierten
$g \in \mathrm{GL}(V)$ bildet eine Untergruppe.

(f) $\{x_1, \dots, x_n\}$ sei Basis von V bzgl. der $f \in \mathrm{End}(V)$ durch die Matrix A gegeben ist. Dann ist f selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ A symmetrisch.
(g) $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert $\Leftrightarrow \exists$ Basis von V aus paarweise orthogonalen Eigenvektoren von f.

21. Euklidische Ringe:

K sei ein Körper, $f, g \in K[X]$ vom Grad $\deg(f), \deg(g) \geq 1$.
(a) $\exists r \in K[X]$ mit $\deg(r) < \deg(g)$ und $f \equiv r \ (\mathrm{mod} g)$.
(b) g irreduzibel, $\mathrm{ggT}(f, g) = 1 \Rightarrow \exists\ h \in K[X]$ mit $hf \equiv 1 \ (\mathrm{mod} g)$.
(c) $\mathrm{ggT}(tf, tg) = t \cdot \mathrm{ggT}(f, g) \quad (t \in K[X])$
(d) Für die von f, g, fg erzeugten Ideale gilt $(f) \cap (g) = (fg)$.
(e) $f = X - 1,\ g = X^3 - 1 \Rightarrow \exists\ a, b \in K[X]$ mit $af + bg = 1$.

22. Hauptidealringe, Moduln:

R sei ein Hauptidealring und M ein endlich erzeugter R-Modul.

(a) $x \in R \Rightarrow R/(x)$ zyklischer R-Modul.
(b) $R/(x)$ ist torsionsfreier R-Modul.
(c) M besitzt eine Basis.
(d) Je zwei Basen von M haben gleiche Ordnung.
(e) Jede linear unabhängige Menge in M kann zu einer Basis ergänzt werden.
(f) $M \cong F \oplus \mathrm{tor}(M)$, F freier R-Modul.
(g) $M \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$, alle M_i zyklisch
(h) wie (g), die M_i sind wohlbestimmt bis auf Isomorphie.
(i) Sei M Torsionsmodul. Dann ist M isomorph zu $\bigoplus_{i \in I} M_i$, wobei die M_i zyklisch und primär sind, und wobei gilt:
Ist $\bigoplus_{j \in J} M'_j$ eine weitere derartige Zerlegung von M, so existiert eine Bijektion $\beta : I \longrightarrow J$, so dass für alle $i \in I$ M_i zu $M'_{\beta(i)}$ isomorph ist.

23. Minimalpolynom und Jordan-Form:

Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ mit Minimalpolynom M_f und charakteristischem Polynom P_f.
(a) $M_f | P_f$
(b) $P_f | M_f$
(c) $\exists\ n \in \mathbb{N}$, so dass $P_f | M_f^n$
(d) $P_f(f) = 0$
(e) $M_f(f) = 0$.

f besitzt eine Jordan-Normalform:
(f) immer;

(g) wenn $M_f(X)$ in Linearfaktoren zerfällt;
(h) wenn $P_f(X)$ in Linearfaktoren zerfällt;
(i) genau dann, wenn f diagonalisierbar ist.
(j) f nilpotent $\Leftrightarrow P_f(X) = X^n$, $n = \dim V$.

24. Chevalley-Zerlegung:

V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ mit Chevalley-Zerlegung $f = f_d + f_n$.
(a) $g \in \mathrm{End}(V)$, $gf = fg \Rightarrow gf_d = f_d g$
(b) $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $(f - \lambda)^n(v) = 0 \Rightarrow f_d(v) = \lambda v$
(c) $\mathrm{Spur}(f) = \mathrm{Spur}(f_d)$
(d) f_n diagonalisierbar.

Antwortblatt

Die folgenden Aussagen sind falsch:

1 a,b,d,g,i
2 a,c,e
3 b,e
4 a,c,d,f,g
5 a,d
6 b
7 a,c,d,e
8 d,e
9 c,d,e
10 a,c
11 a,b,c,f
12 a,b,c
13 a,b,c
14 a,c
15 b,c,e,g
16 a,c,f,g
17 a,c,d
18 a,d
19 a,b,d
20 b,e,f
21 d,e
22 b,c,e,h
23 b,f,i
24 d

Einige der falschen Aussagen werden korrekt unter zusätzlichen Voraussetzungen, z.B.
4d,f,g: G abelsch
5d: G endlich
7d: B Basis $\Leftrightarrow$ B linear unabhängig und für alle $v \in V \setminus B$ ist $B \cup \{v\}$ linear abhängig.
7e: $\dim V$ endlich
8e: K unendlich
9d,e: $\dim V$, $\dim W$ endlich
13a,b: Diagonalelemente von $A \neq 0$.
17a: K unendlich
19a: nur richtig für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
19b: richtig z.B. für $\dim U$ endlich
20f: $\{x_1, \ldots, x_n\}$ Orthonormalbasis
21d: $\mathrm{ggT}(f, g) = 1$.