Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, WS 1999/2000

Aufgabe 1:(*10 Punkte*)

a) Auf wieviele Weisen können drei Personen, die auf drei Stühlen sitzen, die Plätze tauschen, so daß auf jedem Stuhl wieder genau eine Person sitzt? (Beachten Sie, daß aufstehen und sich wieder auf den gleichen Stuhl setzen auch als "Tausch" gilt.)

b) Stellen Sie jede Platztauschaktion als Abbildung dar und numerieren Sie diese durch, z.B.:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solche Abbildungen heißen Permutationen von $\{1,2,3\}$.

c) Hintereinanderausführung zweier Permutationen ist wieder eine Permutation. Drücken Sie zwei der von Ihnen gefundenen Permutationen durch eine "Produktpermutation" $f \circ g$ von Permutationen f und g von $\{1,2,3\}$ aus.

d) Finden Sie zu jeder einzelnen Permutation f eine Permutation g derart, daß $f \circ g$ die Identitätsabbildung von $\{1,2,3\}$ ist.

Aufgabe 2:(*12 Punkte*)

a) "Ich kann mich nicht entscheiden ", jammert Sara, die gerade dabei ist, ihre Wohnung einzurichten. "Ich habe meine Lieblingsfarben zur Auswahl, das sind rot, orange, senf- und sandfarben, braun, mint, dunkelblau, khaki und hellgrau. Diese will ich nun auf ein großes und ein kleines rundes Kissen, ein großes und ein kleines quadratisches Kissen, den Sofabezug, den Teppich und den Vorhang verteilen. Und ich weiß nicht, was am besten ausschaut." "Nichts leichter als das", sagt ihre Freundin Helena, "probier doch einfach alle Kombinationen durch!"
Auf wieviele Versuche läßt sich Sara ein, wenn sie

(i) jedem Teil eine andere Farbe zuordnet?

(ii) eine Farbe auch mehrfach vorkommen kann?

b) Schließlich entdeckt Sara noch einen Sessel und einen Hocker, die sie ihrer Einrichtung hinzufügt. Zugleich entscheidet sie sich, doch kein orange zu verwenden. Wieviele Versuche ergeben sich nun unter den oben genannten Bedingungen?

c) Schlußendlich entscheidet sich Sara nun doch gegen den Hocker und dafür, daß jede Farbe wenigstens einmal erscheinen soll. Wieviele Versuche hat sie nun durchzustehen?

d) Beschreiben Sie die Aufgabenstellung abstrakt mittels Abbildungen von einer Menge M mit m Elementen in eine Menge N mit n Elementen sowie den Begriffen Injektivität und Surjektivität. Formulieren Sie Ihre oben getroffenen Aussagen in dieser Situation.

Aufgabe 3:(*8 Punkte*) Seien L, M, N drei Mengen sowie $f : L \to M$ und $g : M \to N$ zwei Abbildungen. Zeigen Sie:

a) Sind f und g surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

b) Sind f und g injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

c) Ist $g \circ f$ surjektiv, dann auch g.

d) Ist $g \circ f$ injektiv, dann auch f.

Aufgabe 4:(*10 Punkte*)
Sei M eine Menge. Unter einer *Äquivalenzrelation* auf M versteht man eine Relation (also formal eine Teilmenge $R \subset M \times M$, aber statt $(x, y) \in R$ schreibt man $x \sim y$ und spricht von der "Äquivalenzrelation $\sim$"), welche die folgenden drei Axiome erfüllt:

(i) Reflexivität: $x \sim x$ für alle $x \in M$

(ii) Symmetrie: $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$

(iii) Transitivität: aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$.

Zeigen Sie: Die Relation

$$(a, b) \sim (c, d) \;:\Leftrightarrow\; ad - bc = 0$$

mit $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ b, d \neq 0$ ist eine Äquivalenzrelation.
Was hat dies mit den rationalen Zahlen zu tun?

Aufgabe 5:(*10 Punkte*)

a) Beschreiben Sie in $\mathbb{R}^2$ für die Menge aller Geraden die Äquivalenzrelation, die sich aus der Zusammenfassung paralleler Geraden zu einer Klasse ergibt. Begründen Sie Ihre Aussage.

b) Zeigen Sie: Die Menge aller Ursprungsgeraden bildet ein Repräsentantensystem bezüglich dieser Äquivalenzrelation.

Aufgabe 6:(*10 Punkte*)
Auf den natürlichen Zahlen wird als Ordnungsrelation die Teilbarkeit eingeführt.
Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Wir definieren:

$$(*) \quad a \leq b \quad :\Leftrightarrow \quad a|b\ ,$$

wobei $a|b$ heißt, daß a die Zahl b teilt.

a) Zeigen Sie: $(*)$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$.

b) Gegeben seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $a|c$ und $b|c$. Geben Sie je ein Beispiel an für:
   - (i) $ab|c$ und $c\not|\, ab$
   - (ii) $c|ab$ und $ab\not|\, c$
   - (iii) $ab\not|\, a$ und $c\not|\, ab$
   - (iv) $ab|c$ und $c|ab$.

Aufgabe 7:(*10 Punkte*)

a) Erstellen Sie für S_3, die Menge der Permutationen aus Aufgabe 1, Übungsblatt 1, eine Verknüpfungstafel.

b) Finden Sie all jene Permutationen f, für die gilt:

$$f \circ g = g \circ f \quad \text{für alle } g \in S_3.$$

Aufgabe 8:(*15 Punkte*) Sei $M := \{a, b, c\}$ eine Menge mit drei Elementen.

a) Bestimmen Sie alle Äquivalenzrelationen auf M.

b) Bestimmen Sie alle Ordnungsrelationen auf M.

c) Sei N eine Menge mit fünf Elementen.
Dann gibt es 52 Äquivalenzrelationen $\mathcal{R} \subset N \times N$.
(Hinweis: Überlegen Sie sich, wieviele disjunkte Zerlegungen einer fünfelementigen Menge sich bilden lassen.)

Aufgabe 9:(*10 Punkte*) Seien M, N Mengen und $f \subset M \times N$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie: Die Relation $a\mathcal{R}b :\Leftrightarrow f(a) = f(b)$ für alle $a, b \in M$ ist eine Äquivalenzrelation auf M.

b) Sei $\overline{M} := \{[x] \mid x \in M\}$ die Menge der Äquivalenzklassen. Dann ist

$$\begin{aligned} \overline{f} : \overline{M} &\longrightarrow N\ , \\ [x] &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

eine Abbildung, und sie ist injektiv.

Aufgabe 10:(*5 Punkte*) Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$:

$$a \sim b :\Leftrightarrow a - b \equiv 0 \bmod n \quad \text{für alle} \quad a, b \in \mathbb{N}\ .$$

Zeigen Sie, daß sowohl die Additionsabbildung

$$+\ : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ ,\ ([a],[b]) \mapsto [a] + [b] := [a+b]$$

als auch die Multiplikationsabbildung

$$\cdot : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ ,\ ([a],[b]) \mapsto [a] \cdot [b] := [a \cdot b]$$

auf der Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ der Äquivalenzklassen wohldefiniert sind.

Aufgabe 11:(*10 Punkte*) Welche der folgenden Verknüpfungen $(M, \circ)$ sind assoziativ bzw. kommutativ?

a) $M = \mathbb{R}$ und $a \circ b := (a + b) - a \cdot b$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

b) $M = \mathbb{R}$ und $a \circ b := (a + b)^3$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

c) $M = \mathbb{N}$ und $a \circ b := a^b$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$.

d) $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist polynomiale Abbildung}\}$ und $f \circ g(x) = f(g(x))$ für alle $f, g \in M$.

Erläuterung: Eine polynomiale Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Abbildung der Form

$$x \mapsto f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_k x^k$$

mit geeigneten $k \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 12:(*12 Punkte*) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $a \in G$. Zeigen Sie:

a) $\langle a \rangle := \{\ldots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, e, a^1, a^2, a^3, \ldots\}$ ist eine abelsche Untergruppe von G. Man nennt $\langle a \rangle$ die von a erzeugte Untergruppe von G.

b) Ist G endlich, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\langle a \rangle = \{a, a^2, \ldots, a^n\}$.

c) Ist die Zahl der Elemente von G eine Primzahl, so existiert ein $a \in G$ mit $G = \langle a \rangle$.

Aufgabe 13:(*8 Punkte*) Eine nichtleere **endliche** Teilmenge U einer Gruppe $(G, \circ)$ ist eine Untergruppe genau dann, wenn mit $a, b \in U$ stets gilt $a \circ b \in U$.
Gilt die Aussage auch dann, wenn U eine beliebige nichtleere Teilmenge ist?

Aufgabe 14:(*8 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle Untergruppen der S_3 (vgl. Übungsblatt 1 und 2)!

b) Bestimmen Sie die von

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$$

erzeugte Untergruppe!

Aufgabe 15:(*12 Punkte*) Seien $(G, \cdot)$, $(G_1, \circ_1)$, $(G_2, \circ_2)$ und $(G_3, \circ_3)$ Gruppen. Zeigen Sie:

a) Sind $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ und $\psi : G_2 \longrightarrow G_3$ Homomorphismen, so ist $\psi \circ \phi$ ein Homomorphismus von G_1 nach G_3.

b) Ist $f : G_1 \longrightarrow G_2$ ein bijektiver Gruppenhomomorphismus, so ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : G_2 \longrightarrow G_1$ ebenfalls ein bijektiver Gruppenhomomorphismus von $(G_2, \circ_2)$ nach $(G_1, \circ_1)$.

c) $(G, \cdot)$ ist genau dann abelsch, wenn die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ ein Gruppenisomorphismus ist.

Aufgabe 16:(*10 Punkte*) Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe und $\mathrm{End}(G)$ die Menge aller Homomorphismen von G nach G. Zeigen Sie, daß $\mathrm{End}(G)$ bezüglich der Addition

$$(\varphi \oplus \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x) \text{ für alle } \varphi, \psi \in \mathrm{End}(G) \text{ und alle } x \in G$$

und der Multiplikation

$$(\varphi \circ \psi)(x) := \varphi(\psi(x)) \text{ für alle } \varphi, \psi \in \mathrm{End}(G) \text{ und alle } x \in G$$

ein Ring mit 1 ist.

Aufgabe 17:(*12 Punkte*)

a) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, daß $K^2 = K \times K$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation ein Ring mit 1, aber kein Körper ist.

b) Konstruieren Sie zwei (nicht isomorphe) Ringe mit 4 Elementen.

c) Konstruieren Sie einen Körper mit 4 Elementen.

Aufgabe 18:(*10 Punkte*) Sei $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ der Körper der komplexen Zahlen.

a) Berechnen Sie

$$(-1+2i)+(6-7i), \quad (2+3i)(-1-4i), \quad \frac{1+i}{2-3i}, \quad \left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3, \quad \{i^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

b) Lösen Sie über $\mathbb{C}$ die Gleichungen

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \quad \text{und} \quad x^4 - 2x^2 + 6 = 0.$$

Aufgabe 19:(*8 Punkte*)
Auf der Menge $\mathbb{R}$ sei eine Vektoraddition

$$a \oplus b := \sqrt[3]{a^3 + b^3} \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}$$

und eine Skalarmultiplikation

$$r \odot a := \sqrt[3]{r} \cdot a \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R} \text{ und } r \in \mathbb{Q}$$

definiert. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}$ bezüglich dieser Operationen ein Verktorraum über $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 20:(*10 Punkte*) Eine polynomiale Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}, \text{ falls } \left\{ \begin{array}{rcl} f(-x) & = & f(x) \\ f(-x) & = & -f(x) \end{array} \right\} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt.}$$

a) $F_g := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist gerade }\}$ und $F_u := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist ungerade }\}$ sind Untervektorräume des Vektorraumes der polynomialen Abbildungen auf $\mathbb{R}$.

b) $F_g \cap F_u = \{0\}$.

c) Jede polynomiale Abbildung ist auf genau eine Weise als Summe einer geraden und einer ungeraden polynomialen Abbildung darstellbar.

Aufgabe 21:(*10 Punkte*) Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:
φ ist injektiv genau dann, wenn $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ in W linear unabhängig sind.

Aufgabe 22:(*5 Punkte*) Sei $M = \{\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

b) Je drei Elemente aus M sind in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig.

c) Ist M ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 23:(*10 Punkte*)

a) Seien $v_1, \ldots, v_4$ paarweise linear unabhängige Elemente des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^3$. Geben Sie ein Beispiel für solche Vektoren an.
Zeigen Sie: es existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, nicht alle gleich Null, so daß

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 \cdot v_4 = 0$$

ist.

b) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $n \geq 2$. Konstruieren Sie eine unendliche Folge paarweise linear unabhängiger Vektoren in V.

Aufgabe 24:(*10 Punkte*) Zeigen Sie in den folgenden beiden Fällen, daß es jeweils genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit den angegebenen Eigenschaften gibt, und bestimmen Sie die Matrix von f bzgl. der Standardbasis.

a) $n = 2$ und $m = 3$ sowie

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) $n = 3$ und $m = 2$ sowie

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25:(*10 Punkte*) Betrachten Sie die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit der üblichen Addition als $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 2. Dabei kann man 1 mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und i mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ identifizieren. (Machen Sie sich dies klar!) Sei $c \in \mathbb{C}$.

a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_c : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto c \cdot z \end{aligned}$$

ist linear.

b) Beschreiben Sie für $\mathbb{C}$ aufgefaßt als $\mathbb{R}$-Vektorraum die Abbildung φ_c mittels einer Matrix bezüglich der oben genannten Basis.

c) Geben Sie aale $c \in \mathbb{C}$ an, die Drehungen um 90 Grad bzw. 120 Grad bewirken.

Aufgabe 26:(*10 Punkte*) Bilden Sie alle Matrizenprodukte $M_i \cdot M_j$ mit $1 \leq i, j \leq 5$, falls diese definiert sind.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ M_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ M_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \ M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 27:(*10 Punkte*) Bestimmen sie a so, daß das Gleichungssystem über $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 &= 3 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

a) keine, b) mehr als eine, c) genau eine
Lösung hat.

Aufgabe 28:(*7 Punkte*) Welche der folgenden Relationen $\mathcal{R}$ sind Funktionen vom ersten Faktor des kartesischen Produktes in den zweiten Faktor? Welche sind es nicht? (Als Begründung reicht die Anführung eines Gegenbeispieles aus. Daß eine Relation eine Funktion ist, muß **nicht** bewiesen werden.)

a) $\mathcal{R}_1 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a\mathcal{R}_1 b \;:\Leftrightarrow\; a^3 = b$,
b) $\mathcal{R}_2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ und $a\mathcal{R}_2 b \;:\Leftrightarrow\; a^3 = b$,
c) $\mathcal{R}_3 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a\mathcal{R}_3 b \;:\Leftrightarrow\; a = b^3$,
d) $\mathcal{R}_4 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ und $a\mathcal{R}_4 b \;:\Leftrightarrow\; a = b^3$.

Aufgabe 29:(*3 Punkte*) Bestimmen Sie für

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$$

a) σ^5 und b) σ^{-1}.

Aufgabe 30:(*10 Punkte*) Sei R ein Ring. Dann wird mit R^* die Gruppe der multiplikativ invertierbaren Elemente von R bezeichnet.

a) Bestimmen Sie das Erzeugnis von $\overline{7}$, der Äquivalenzklasse, die von 7 repräsentiert wird, in $((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*, \cdot)$!
b) Geben Sie explizit einen Isomorphismus von $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$ nach $((\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*, \cdot)$ an.
c) Sei $(G, \circ)$ eine (nicht notwendig abelsche) Gruppe und $\mathrm{End}(G)$ die Menge aller Homomorphismen auf G. Ist dann $\mathrm{End}(G)$ bezüglich der Verknüpfungen

$$\begin{array}{lcll} (\varphi \oplus \psi)(x) & := & \varphi(x) \circ \psi(x) & \text{für alle } \varphi, \psi \in \mathrm{End}(G) \text{ und alle } x \in G \text{ und} \\ (\varphi \odot \psi)(x) & := & \varphi(\psi(x)) & \text{für alle } \varphi, \psi \in \mathrm{End}(G) \text{ und alle } x \in G \end{array}$$

ein Ring?

Aufgabe 31:(*7 Punkte*)
Sind die folgenden Mengen Untervektorräume des K-Vektorraumes V?

a) $K = \mathbb{R}$, $M = \{x \in \mathbb{C} \mid x^6 = 1\}$ und $V = \mathbb{C}$,
b) $K = \mathbb{R}$, $M = \{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^1 = 1\}$ und $V = \mathbb{R}^2$,
c) $K = \mathbb{R}$, $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \alpha \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) + \beta \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ und $V = \mathbb{R}^3$,
d) $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $M = \{f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in K\}$ und V der Vektorraum aller Polynome in X über K.

Aufgabe 32:(*3 Punkte*) Sei V ein K-Vektorraum. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\{u, v, w\} \subset V \text{ linear unabhängig} \Rightarrow \{u + v,\ v + w,\ u + w\} \text{ linear unabhängig}$$

Aufgabe 33:(*10 Punkte*) Sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit der (geordneten) Standardbasis (e_1, e_2) gegeben. Weiter seien $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineare Abbildungen, die durch

$$\varphi(e_1) = e_2,\ \varphi(e_2) = e_1 \text{ und } \psi(e_1) = e_1 + e_2,\ \psi(e_2) = 2e_2$$

definiert sind.

a) Bestimmen Sie die zugehörigen Matrizen A_φ und A_ψ.

b) Bestimmen Sie für $\varphi + \psi$ und $\varphi \circ \psi$ die entsprechenden Matrizen und zudem Kern und Bild dieser beiden Abbildungen.

Aufgabe 34:(*10 Punkte*)

a) Sei K ein Körper,

$$w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ U = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid x \in K\} \text{ und } B = \{\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) \mid x, y, z \in K,\ xz \neq 0\}\ .$$

Zeigen Sie: $\mathrm{GL}(2, K)$ ist die disjunkte Vereinigung von B mit $B \cdot w \cdot U$; jedes $a \in \mathrm{GL}(2, K)$, das nicht in B liegt, läßt sich in der Form $a = b \cdot w \cdot u$ mit eindeutig bestimmten $b \in B$ und $u \in U$ darstellen.

b) Sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl und $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Wieviele Elemente hat $\mathrm{GL}(2, K)$?

Aufgabe 35:(*10 Punkte*) Sei $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\varphi : K^5 \longrightarrow K^5$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Standardbasis $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

a) Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ und $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ und geben Sie jeweils eine Basis an.

b) Gilt $\mathrm{Ker}\,(\varphi) + \mathrm{Im}\,(\varphi) = K^5$?

Aufgabe 36:(*10 Punkte*) Sei $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $V = K^4$.
Weiter seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie: $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist linear unabhängig.

b) Ergänzen Sie $\{v_1, v_2, v_3\}$ zu einer Basis des K^4. Sei dieser Vektor v_4.

c) Bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung, die die (geordnete) Standardbasis in die (geordnete) Basis (v_1, v_2, v_3, v_4) überführt.

d) Sei die lineare Abbildung $\psi : K^4 \longrightarrow K^4$ bezüglich der Standardbasis beschrieben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Geben Sie die zu φ gehörige Matrix bezüglich der Basis (v_1, v_2, v_3, v_4) an.

Aufgabe 37:(*10 Punkte*)
Familie Meyer hat drei Kinder: Jan, Heike und Katherina. Zusammen sind die drei 28 Jahre alt. Wenn Katherina doppelt so alt sein wird wie Heike heute, dann wird die Summe der drei Alter gerade 46 Jahre sein. Und wenn Heike so alt sein wird, wie Katherina heute ist, wird Jan doppelt so alt wie heute sein. Wie alt sind die Kinder?

Aufgabe 38:(*7 Punkte*)
Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^4$ des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 10 & 12 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 39:(*8 Punkte*)
Beweisen Sie: Sei K ein Körper, $x \in K^n$ und $U \subset K^n$ ein Untervektorraum. Dann existiert ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizienten in K mit n Gleichungen für n Unbekannte, dessen Lösungsmenge genau $x + U$ ist.

Aufgabe 40:(*10 Punkte*) Invertieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}) .$$

Aufgabe 41:(*7 Punkte*)
Zeigen Sie: Hat ein inhomogenes lineares Gleichungssystem in n Unbekannten, dessen Koeffizienten (der linken und der rechten Seite) rationale Zahlen sind, eine Lösung in $\mathbb{R}^n$, so hat es auch eine Lösung in $\mathbb{Q}^n$.

Aufgabe 42:(*8 Punkte*)
Seien folgende Elemente des $\mathbb{R}$-Vektoraumes $\mathbb{R}^4$ gegeben: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $w_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig? Welche der Vektoren w_i, $i = 1, 2, 3$, liegen im Erzeugnis von $v_1, \ldots , v_4$?
(Tip: Wenden Sie den Gauß–Algorithmus auf $v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2, w_3$ an.)

Aufgabe 43:(*12 Punkte*)
Im $\mathbb{R}^3$ seien die (geordneten) Basen

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben. Bestimmen Sie die Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$!

Aufgabe 44:(*12 Punkte*)
Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ habe bzgl. der Standardbasen die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bzgl. der Basen

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) .$$

Aufgabe 45:(*16 Punkte*)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.
Für $A = (a_{i,j}) \in M(n, K)$ heißt $S(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ die *Spur von A*.

a) Zeigen Sie: $S(AB) = S(BA)$ für alle $A, B \in M(n, K)$.

b) Folgern Sie aus a), daß konjugierte Matrizen die gleiche Spur haben.

c) Welche der folgenden Matrizen sind konjugiert in $M(2,\mathbb{R})$?

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Nun können wir auch die *Spur eines Endomorphismus* definieren:
Sei ϕ ein Endomorphismus des n-dimensionalen K-Vektorraumes V. Wir wählen eine Basis $\mathcal{B}$ von V und bestimmen die Abbildungsmatrix A von ϕ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Dann ist die Spur von ϕ gerade $S(\phi) := S(A)$.
Da konjugierte Matrizen nach Teil b) die gleiche Spur haben, ist die Definition unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$.

Aufgabe 46:(*10 Punkte*) Zeigen Sie, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 18 & 30 \\ -2 & 9 & 10 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \in M(3,\mathbb{R})$$

konjugiert ist zu der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und geben Sie ein $C \in M(3,\mathbb{R})$ an mit $B = C^{-1}AC$.
(Hinweis: Betrachten Sie den durch A bzgl. der Standardbasis dargestellten Endomorphismus von $\mathbb{R}^3$.)

Aufgabe 47:(*10 Punkte*) Welche der folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} \phi_1 : M(2,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} &:& \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc, \\ \phi_2 : M(2,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} &:& \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ac + 4ad - bd, \\ \phi_3 : M(2,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} &:& \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto -ad + bc - 3b + 3d, \\ \phi_4 : M(2,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} &:& \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto 42bc - 42ad \end{aligned}$$

sind Determinantenfunktionen? (Begründungen!)

Aufgabe 48:(*10 Punkte*) Seien $n, i, k \in \mathbb{N}$. Mit $(i,k) \in S_n$ werden die Transpositionen bezeichnet, die die i-te und k-te Position miteinander vertauschen und die anderen Positionen festlassen. Bestimmen Sie für

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} \in S_8$$

a) die Inversionszahl $a(\sigma) = |\{(i,j) \mid i < j \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j)\}|$ und das Signum,

b) eine Zerlegung in spezielle Transpositionen $(k, k+1)$,

c) eine weitere Zerlegung von σ in Transpositionen.

Aufgabe 49:(*10 Punkte*) Sei $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

a) Die Gruppe $\mathrm{GL}(2,K)$ wird von den Matrizen $\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$ erzeugt.

b) Jedes $A \in \mathrm{GL}(2,K)$ bewirkt durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ eine Permutation π_A auf K^2.
(Hinweis: Numerieren Sie die neun Elemente von K^2! Es genügt die genannte Eigenschaft für die erzeugenden Matrizen zu zeigen [wieso?].)

c) Es gilt:

$$\operatorname{sgn}(\pi_A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \det(A) = \overline{1} \\ -1 & \text{falls } \det(A) = \overline{2} \end{cases}$$

Aufgabe 50:(*14 Punkte*) Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}),\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(3,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}),\ C = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 31 & 12 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(4,\mathbb{Q}),$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 14 & -8 & 21 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 22 & 39 & -11 \end{pmatrix} \in M(5,\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 & 7 & 28 \\ 2 & 5 & 7 & 11 & 13 \\ 1 & 0 & 17 & 3 & 8 \\ 6 & 15 & 21 & 33 & 39 \\ 0 & 41 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(5,\mathbb{R}).$$

Aufgabe 51:(*12 Punkte*) Seien $n \in \mathbb{N}$, $\lambda, \rho \in \mathbb{Q}$ und

$$A := \begin{pmatrix} \rho & \lambda & & \dots & \lambda \\ \lambda & \rho & \lambda & \dots & \lambda \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & & \lambda \\ \lambda & & \dots & \lambda & \rho \end{pmatrix} \in M(n,\mathbb{Q})$$

Zeigen Sie: $\det(A) = (\rho + (n-1)\lambda)(\rho - \lambda)^{n-1}$.

Aufgabe 52:(*14 Punkte*) Sei K ein Körper. Für $a, b, c \in K$ sei $T(a,b,c)$ die Matrix

$$T(a,b,c) := \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3,K).$$

a) Berechnen Sie das Produkt $T(a,b,c) \cdot T(a',b',c')$ sowie die Inverse $T(a,b,c)^{-1}$.

b) Die Menge $H := \{T(a,b,c) \mid a,b,c \in K\}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(3,K)$.

c) Berechnen Sie für $T = T(a,b,c)$ und $T' = T(a',b',c')$ das Produkt $TT'T^{-1}(T')^{-1}$.

d) Für eine beliebige Gruppe G ist $Z(G) := \{z \in G \mid gz = zg \text{ für alle } g \in G\}$ eine Untergruppe von G, das *Zentrum von G*.

e) Es ist $Z(H) = \{T(0,0,c) \mid c \in K\}$.

Aufgabe 53:(*20 Punkte*)

a) Geben Sie für die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

aus $M(3,\mathbb{Q})$ alle Eigenwerte und eine Basis jeden Eigenraumes an.

b) Können A oder B diagonalisiert werden und warum? Bestimmen Sie jeweils gegebenenfalls eine Matrix, die diese durch Konjugation auf eine Diagonalmatrix abbildet.

c) Was fällt auf? Sind A und B konjugiert?

d) Sei $C := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M(n,\mathbb{Q})$. Zeigen Sie: C ist nicht diagonalisierbar.
Geben Sie einen Körper K an, für den C als Element von $M(2,K)$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 54:(*10 Punkte*) Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Ein Endomorphismus $h : V \longrightarrow V$ heißt *Homothetie*, wenn es ein $a \in K$ gibt mit $h(v) = av$ für alle $v \in V$.
Zeigen Sie: Ist f ein Endomorphismus von V, für den jeder Vektor außer dem Nullvektor ein Eigenvektor ist, so ist f eine Homothetie.

Aufgabe 55:(*10 Punkte*) Seien K ein Körper und $m, n, r \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in M(m \times n, K)$ hat genau dann Rang r, wenn es einen von 0 verschiedenen Minor der Ordnung r von A gibt und wenn alle Minoren der Ordnung $> r$ von A verschwinden.
(Ein *Minor der Ordnung* r *von* A ist die Determinante einer quadratischen $(r \times r)$-Teilmatrix von A, die durch Streichung von $m - r$ Zeilen und $n - r$ Spalten aus A hervorgeht.)

Aufgabe 56:(*10 Punkte*) Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&1&1&0&1 \\ 1&1&1&0&1&0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) über dem Körper $\mathbb{R}$.

b) über dem Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

c) über dem Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Aufgabe 57:(*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie (falls möglich) die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -7 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R}).$$

b) Sei $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Geben Sie eine Lösung für $Ax = b$ an.

Aufgabe 58:(*15 Punkte*) Sei V der Vektorraum aller polynomialen Abbildungen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Seien

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} F : V & \longrightarrow & \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f \circ \phi \end{array}.$$

Zeigen Sie: F ist eine lineare Abbildung. Bestimmen Sie $F(3x^2)$ und $F(V)$.

b) Geben Sie die Abbildungsmatrix von $F : V \longrightarrow F(V)$ bezüglich der Basis $(1, x, x^2)$ an.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von F bezüglich der Basis $(1 + x, x + x^2, x^2)$.

Aufgabe 59:(*10 Punkte*) Zeigen Sie:

$$K := \{ \begin{pmatrix} a & 6b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{Q}) \}$$

ist bezüglich der Matrizenaddition und Multiplikation ein Körper.

Aufgabe 60:(*20 Punkte*) Seien K ein Körper und $a_0, \dots a_n$ und $b \in K$. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_1 + a_2 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & a_2 + a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} + a_n \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n} \left(\prod_{i \neq j} a_i \right).$$

Aufgabe 61: Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen aus $M(3, \mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \ C = A^{-1}, \ D = AB \text{ und } E = A + B.$$

Aufgabe 62:(*10 Punkte*) Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Sind $f = a_m X^m + \ldots + a_0, \ g = b_n X^n + \ldots + b_0 \in \mathbb{R}[X]$ Polynome mit $\deg(f) = m$ und $\deg(g) = n$, so ist die *Resultante* von f und g definiert durch:

$$\operatorname{Res}(f, g) := \det \begin{pmatrix} a_0 & \dots & \dots & a_m & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & a_0 & \dots & \dots & a_m \\ b_0 & \dots & \dots & b_n & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & b_0 & \dots & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} n\text{-Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} m\text{-Zeilen} \end{matrix}$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) $\operatorname{Res}(f, g) = 0$.

b) $f, Xf, \dots, X^{n-1}f, g, Xg, \dots, X^{m-1}g$ sind linear abhängig.

c) Es existieren $p, q \in \mathbb{R}[X], \ p, q \neq 0$ mit $\deg(p) \leq n - 1, \ \deg(q) \leq m - 1$ und $pf = qg$.

Aufgabe 63:(*10 Punkte*) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der reellen Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 & 8 \\ -2 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und geben Sie eine Matrix $B \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ an, so daß $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist.