Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra II, SS 2000

Aufgabe 1:(*10 Punkte*)
Sei V ein K-Vektorraum und $\varphi : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi \circ \varphi = \varphi$ (d.h. φ ist eine *idempotente Abbildung* oder eine *Projektion*). Des weiteren sei $\psi = \mathrm{id}_V - \varphi$. Zeigen Sie:

a) ψ ist idempotente Abbildung.

b) $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = 0$.

c) $\mathrm{Im}\ (\varphi) = \mathrm{Ker}\ (\psi)$ und $\mathrm{Ker}\ (\varphi) = \mathrm{Im}\ (\psi)$.

d) $\mathrm{Im}\ (\varphi) \oplus \mathrm{Ker}\ (\varphi) = V$.
(D. h. $\mathrm{Im}\ (\varphi) + \mathrm{Ker}\ (\varphi) = V$ und $\mathrm{Im}\ (\varphi) \cap \mathrm{Ker}\ (\varphi) = \{0\}$.)

Aufgabe 2:(*10 Punkte*) Berechnen Sie mittels vollständiger Induktion die Determinante der rellen $(n \times n)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 3:(*10 Punkte*)
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $A \in \mathrm{End}_K(V)$ und $R = K[X]$. Zeigen Sie: V ist ein R-Modul bezüglich

$$f(X) \cdot v := f(A) \cdot v = \sum_{i=0}^{n} c_i A^i(v) \quad \text{für alle } v \in V,$$

wobei $f(X) = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i \in R$ ist.

Aufgabe 4:(*10 Punkte*)
Seien K ein Körper, V_i K-Vektorräume und f_i lineare Abbildungen. Unter einem *Kettenkomplex C* versteht man eine Folge von Homomorphismen

$$\{0\} \xrightarrow{f_{n+1}} V_n \xrightarrow{f_n} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_2} V_1 \xrightarrow{f_1} V_0 \xrightarrow{f_0} \{0\}$$

mit der Eigenschaft $f_0 = 0 = f_{n+1}$ und $f_i \circ f_{i+1} = 0$ für $i = 1, \dots, n$, d. h. $\mathrm{Im}\ (f_{i+1}) \subset \mathrm{Ker}\ (f_i)$. Der Quotientenvektorraum $H_i(C) := \mathrm{Ker}\ (f_i)/\mathrm{Im}\ (f_{i+1})$ für $i = 1, \dots, n$ heißt *i-te Homologie des Komplexes.*
Zeigen Sie: Sind alle V_i endlich dimensional, so ist

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim(V_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim(H_i(C)) \ .$$

(**Hinweis:** Verwenden Sie Induktion nach n. Was bedeutet die Aussage für $n = 0, 1$?)

Aufgabe 5:(*10 Punkte*)
Betrachten Sie in dieser Aufgabe $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Moduln bezüglich der herkömmlichen Multiplikation. Zeigen Sie:

a) Jede Teilmenge von $\mathbb{Q}$ mit mehr als einem Element ist linear abhängig.

b) $\mathbb{Q}$ ist nicht frei.

Bestimmen Sie

c) eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{Z}$, die sich nicht zu einer Basis von $\mathbb{Z}$ ergänzen läßt,

d) ein linear abhängiges Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}$, das sich nicht zu einer Basis verkleinern läßt.

Aufgabe 6:(*10 Punkte*)
Ein Element $x \in R$ eines Ringes R heißt *idempotent* genau dann, wenn $x^2 = x$ ist.
Ein Ring, in dem jedes Element idempotent ist, heißt *Boolescher Ring.*
Sei nun A ein Boolescher Ring mit Einslement 1_A. Zeigen Sie:

a) Es gilt $1_A + 1_A = 0$.

b) A ist kommutativ.

c) Das Einselement ist die einzige Einheit von A.

Sei X eine beliebige Menge und $\mathfrak{P}(X)$ ihre Potenzmenge.

d) $\mathfrak{P}(X)$ ist ein Boolescher Ring bezüglich der Verknüpfungen

$$\begin{aligned} M + N &:= (M \cup N) - (M \cap N) = (M - N) \cup (N - M), \\ M \cdot N &:= M \cap N. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Addition wird als *symmetrische Differenz* bezeichnet.

Aufgabe 7:(*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle Einheiten, Nullteiler, nilpotenten und idempotenten Elemente im Ring $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ und zeigen Sie, daß die Einheitengruppe dieses Ringes isomorph zu $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ ist.

b) Invertieren Sie $\overline{12}$ in $\mathbb{Z}/455\mathbb{Z}$.

Aufgabe 8:(*10 Punkte*)

a) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ (x_1, x_2) &\mapsto (\overline{x_1 - x_2}, 3x_1 - 2x_2) \end{aligned}$$

ein surjektiver $\mathbb{Z}$-Modul-Homomorphismus ist, und bestimmen Sie eine Basis des Kerns Ker (φ).

b) Zeigen Sie: Ist R ein Ring und M ein R-Modul, und sind M_1, M_2 R-Untermoduln von M, so ist

$$\begin{aligned} M_1/(M_1 \cap M_2) &\longrightarrow (M_1 + M_2)/M_2 \\ m_1 + (M_1 \cap M_2) &\mapsto m_1 + M_2 \end{aligned}$$

ein R-Modul-Isomorphismus. Dabei bezeichnet man mit $m_1 + M_2$ die Klasse des Elementes $m_1 \in M_1 + M_2$ in $(M_1 + M_2)/M_2$.

Aufgabe 9:(*10 Punkte*)
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, W ein Untervektorraum von V und $R = \mathrm{End}_K(V)$.
Zeigen Sie:

a) $l(W) := \{f \in R \mid f(W) = 0\}$ ist ein Linksideal von R.

b) $r(W) := \{f \in R \mid f(V) \subset W\}$ ist ein Rechtsideal von R.

c) $I := \{f \in R \mid \dim(f(V)) < \infty\}$ ist ein Ideal von R.

Aufgabe 10:(*10 Punkte*) Berechnen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den ggT von

a) $1173,\ 935 \in \mathbb{Z}$ sowie

b) $f(x) = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 26x - 35,\ g(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 - 3x - 21 \in \mathbb{Z}[x]$.

Aufgabe 11:(*10 Punkte*)

a) Zeigen Sie die *Kürzungsregel in Integritätsringen*:
Ist R ein Integritätsring und sind $a, b, c \in R$ mit $a \neq 0$ und $ab = ac$, so gilt $b = c$.

b) Folgern Sie aus der Kürzungsregel: Endliche Integritätsringe sind Körper.

c) Zeigen Sie, daß $\mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ ein Körper mit acht Elementen ist.
(Hinweis: sei p eine Primzahl, dann wird der Körper mit p Elementen im allgemeinen mit $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ bezeichnet.)

Aufgabe 12:(*10 Punkte*)
Es sei $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die Restklassengruppe der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ nach der Untergruppe $(\mathbb{Z}, +)$. Zeigen Sie:

a) Das halboffene Intervall $[0, 1)$ ist ein Repräsentantensystem für die Gruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

b) Die entsprechend gebildete Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
Finden Sie ein geeignetes Repräsentantensystem.

c) Jede endliche Untergruppe von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ liegt in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

d) Jede endliche Untergruppe von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist zyklisch.
Genauer: Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau eine Untergruppe H_n der Ordnung n, und H_n ist zyklisch.
Beschreiben Sie H_n.

Aufgabe 13:(*10 Punkte*)
Sei R ein euklidischer Ring. Dann läßt sich neben dem größten gemeinsamen Teiler auch das kleinste gemeinsame Vielfache, das kgV, zweier Elemente definieren.
Seien $x, y \in R$. Dann ist das *kleinste gemeinsame Vielfache* das bis auf die Multiplikation mit einer Einheit wohlbestimmte Element $z \in R$, für das gilt:

(i) sowohl $x \mid z$ als auch $y \mid z$,

(ii) Für alle Elemente $w \in R$ mit $x \mid w$ und $y \mid w$ gilt: $z \mid w$.

Zeigen Sie:

a) Sind $a, b \in \mathbb{Z}$ zwei (nicht notwendig teilerfremde) Zahlen, so gilt für die Ideale: $(a) \cap (b) = (\mathrm{kgV}(a, b))$.

b) Für $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ gilt $\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b) = \pm ab$.

c) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 28 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{Z}/29\mathbb{Z})$. Bestimmen Sie die Ordnung von A (d.h. die Zahl k mit $k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid A^n = E_2\}$).

Aufgabe 14:(*10 Punkte*)
Sei $R := \{f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid f'(0) = 0\}$. Zeigen Sie:

a) R ist bezüglich der Addition und Multiplikation aus $\mathbb{R}[X]$ ein Integritätsring.

b) $R^* = \mathbb{R}^* = \{f \in R \mid \deg(f) = 0\}$.

c) In R ist jedes Element darstellbar als ein Produkt von Primelementen und einer Einheit.

d) R ist kein ZPE–Ring.

Hinweise: zu c) Induktion nach $\deg(f)$,
zu d) Betrachten Sie die Zerlegungen von x^6.

Aufgabe 15:(*10 Punkte*)
Auf einem Seeräuberschiff war es üblich, die Beute zu gleichen Teilen unter den Räubern zu verteilen und etwaige Reste dem Koch zu überlassen. Auf einer Kaperfahrt wurde ein Schatz von Goldstücken geraubt. Der Koch konnte sich ausrechnen, davon 2 zu erhalten, da 27 Räuber an Bord waren. Bei der Beutefeier kam es zu Gewalttätigkeiten, denen 7 Räuber zum Opfer fielen. Danach hatte der Koch nur ein Goldstück zu erwarten. Das Schiff lief auf ein Korallenriff, 7 weitere Räuber ertranken, aber Schatz und Koch wurden gerettet. Allerdings erhielt der Koch nun gar nichts mehr von dem Schatz. Wie groß war der Schatz, wenn man bedenkt, daß der Koch nur bis 5000 zählen konnte?
Bei welchen anderen Verläufen des Auflaufens auf das Riff hätte dem Koch dasselbe Malheur passieren können?

Aufgabe 16:(*10 Punkte*) Sei M der $\mathbb{Z}$-Modul $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ und M_1 der $\mathbb{Z}$-Modul $\{(a,b) \in M \mid 2|a \,\text{und}\, 2|b\}$.

a) Fertigen Sie eine Zeichnung von M als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ an, und kennzeichnen Sie darin die Elemente von M_1. Wieviele Elemente hat M/M_1?

b) Finden Sie 3 verschiedene $\mathbb{Z}$-Moduln L_1, L_2, L_3 mit $M_1 \subsetneq L_i \subsetneq M$ für $i = 1,2,3$ und zeichnen Sie diese.

c) Zeichnen Sie den von $\{(2,1),\ (2,3)\}$ erzeugten $\mathbb{Z}$-Modul M_2 und zeigen Sie $M/M_2 \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Aufgabe 17:(*10 Punkte*)

a) Sei $R = \mathbb{Z}[x]$ und $\mathfrak{m} = (2,x)$ das von 2 und x erzeugte Ideal. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{m}$ kein Hauptideal ist und daß $\mathfrak{m}$ als R-Modul nicht von einem Element erzeugbar ist, obwohl R als R-Modul die Basis $\{1\}$ hat.

b) Sei $R = \{\sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Z}[x] \mid 2|a_i \text{ für } i > 0\}$ und $\mathfrak{m} = 2\mathbb{Z}[x] = \{\sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Z}[x] \mid 2|a_i \text{ für alle } i\}$.
Zeigen Sie, daß $\mathfrak{m}$ als R-Modul nicht endlich erzeugt ist. Andererseits ist R als R-Modul endlich erzeugt ($\{1\}$ ist Basis).
Ein Teilmodul eines endlich erzeugten Moduls muß also nicht endlich erzeugt sein.

c) Wieso stehen a) und b) *nicht* in Widerspruch zu den Sätzen der Vorlesung?

Aufgabe 18:(*10 Punkte*)
Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegungen (siehe unten) folgender rationaler Funktionen:

$$\frac{x}{(x^2+2)(x+1)^2(x-1)} \in \mathbb{Q}(x) \quad \text{und} \quad \frac{x+2}{x^2(x^2+1)} \in \mathbb{C}(x).$$

Hinweis: Euklidischer Algorithmus zur Partialbruchzerlegung
Sei K ein Körper, seien $f,g \in K[x]$ zwei Polynome, wobei $g(x) = \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$ die Primfaktorzerlegung von g und g normiert ist. Dann existiert eine eindeutige Darstellung

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{t_{1,1}(x)}{p_1(x)^1} + \frac{t_{1,2}(x)}{p_1(x)^2} + \ldots + \frac{t_{1,\alpha_1}(x)}{p_1(x)^{\alpha_1}} + \ldots + \frac{t_{n,\alpha_n}(x)}{p_n(x)^{\alpha_n}}$$

mit $t_{i,j}(x) \in K[x]$ vom Grad $\deg(t_{i,j}) < j \cdot \deg(p_i)$. Diese Zerlegung läßt sich mit dem euklidischen Algorithmus berechnen:

(i) Dividiere $f(x)$ durch $g(x)$ und erhalte

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x) \quad \text{mit} \deg(r(x)) < \deg(g(x)).$$

(ii) Schreibe $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$ mit $\mathrm{ggT}(g_1(x), g_2(x)) = 1$.

(iii) Stelle $\mathrm{ggT}(g_1(x), g_2(x))$ als Linearkombination von $g_1(x)$ und $g_2(x)$ dar:

$$1 = c_1(x) \cdot g_1(x) + c_2(x) \cdot g_2(x)$$

(iv) Dividiere $r(x) \cdot c_1(x)$ durch $g_2(x)$ und erhalte

$$r(x) \cdot c_1(x) = q_1(x) \cdot g_2(x) + r_2(x).$$

(v) $r_1(x) := q_2(x) \cdot g_1(x) + r(x) \cdot c_2(x)$ liefert nun

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \tilde{q}(x) + \frac{r_1(x)}{g_1(x)} + \frac{r_2(x)}{g_2(x)}.$$

(vi) Sind $g_1(x)$ und $g_2(x)$ von der Form $g_1(x) = p_1(x)^{\alpha_1}$ und $g_2(x) = p_2(x)^{\alpha_2}$, wobei $p_1(x)$ und $p_2(x)$ irreduzibel sind, fahre mit Schritt (vii) fort. Falls nicht, wiederhole das Verfahren für $\frac{r_1(x)}{g_1(x)}$ bzw. $\frac{r_2(x)}{g_2(x)}$.

(vii) Es ist nun

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \tilde{\tilde{q}}(x) + \frac{r_1(x)}{p_1(x)^{\alpha_1}} + \frac{r_2(x)}{p_2(x)^{\alpha_2}} + \ldots + \frac{r_n(x)}{p_r(x)^{\alpha_n}}$$

mit $\deg(r_i(x)) < \deg(p_i(x)^{\alpha_i})$. Division mit Rest für alle $i = 1, \ldots n$ liefert:

$$\begin{aligned} r_i(x) &= t_{i,1}(x) \cdot (p_i(x))^{\alpha_i - 1} + r_{i,1}(x) \\ r_{i,1}(x) &= t_{i,2}(x) \cdot (p_i(x))^{\alpha_i - 2} + r_{1,2}(x) \\ &\vdots \\ r_{i,\alpha_i}(x) &= t_{i,\alpha_i}(x) \cdot (p_i(x))^0. \end{aligned}$$

Aufgabe 19:(*10 Punkte*)
Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} x &\equiv 6 \bmod 11 \\ x &\equiv 5 \bmod 13 \\ x &\equiv 9 \bmod 14 \\ x &\equiv 8 \bmod 15 \end{aligned}$$

Aufgabe 20:(*10 Punkte*)
Sei R der Ring der oberen Dreiecksmatrizen aus $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{F}_2)$.

a) Bestimmen Sie alle Links– und Rechtsideale sowie alle zweiseitigen Ideale von R.

b) Sei $\mathfrak{a}$ das von $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ erzeugte zweiseitige Ideal in R.
Gibt es einen R-Modulhomomorphismus von R nach R mit Kern $\mathfrak{a}$?

c) Besitzt R als $\mathbb{Z}$-Modul Untermoduln, die weder Rechts– noch Linksideale sind?

Aufgabe 21:(*10 Punkte*)

a) Zeigen Sie, daß der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ torsionsfrei, aber nicht frei ist, und folgern Sie daraus, daß $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul nicht endlich erzeugt ist.

b) Sei M_1 der $\mathbb{Z}$-Modul $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ und M_2 der von $\{(12,24)\}$ erzeugte Untermodul von M_1 sowie M der $\mathbb{Z}$-Modul M_1/M_2. Bestimmen Sie $\mathrm{Tor}(M)$ und stellen Sie M in der Form $M = \mathrm{Tor}(M) \oplus F$ mit einem freien Untermodul F von M dar. Welchen Rang hat M?

Aufgabe 22:(*10 Punkte*)
Seien $v_1 = (2,6), v_2 = (6,15)$ und $v_3 = (5,5)$. Betrachten Sie das Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle =: N \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ als Untermodul des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

a) $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist keine Basis von N.

b) Je zwei der Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind $\mathbb{Z}$-linear unabhängig, aber keine Basis von N.

c) Bestimmen Sie eine Basis von N.

Aufgabe 23:(*10 Punkte*)
Sei (x^2+1) das von dem Polynom x^2+1 im Polynomring $\mathbb{R}[x]$ erzeugte Ideal. Zeigen Sie: Es existiert ein Ringisomorphismus

$$\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C} \ .$$

Aufgabe 24:(*10 Punkte*) Bestimmen Sie die die Primärzerlegung folgender $\mathbb{Z}$-Moduln:

a) $\mathbb{Z}/144\mathbb{Z}$,

b) $\mathrm{Tor}(M)$, wobei $M = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\langle (12,\ 24) \rangle$ ist, und

c) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\langle (0,8), (12,4) \rangle$.

Aufgabe 25:(*10 Punkte*) Betrachten Sie den $\mathbb{Z}$-Modul $M := \mathbb{Z}/128\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

a) Für welche Primzahlen $p \in \mathbb{P}$ ist M p-primär? Finden Sie für diese p je ein $x \in M$, dessen p-Exponent maximal ist.

b) Bestimmen Sie die Annullatoren $\mathrm{Ann}((\overline{7}, \overline{2}))$ und $\mathrm{Ann}((\overline{64}, \overline{1}))$.

c) Geben Sie zwei verschiedene Isomorphismen von M mit M an.

Aufgabe 26:(*10 Punkte*)
Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, V der K-Vektorraum K^n, $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$ und $R = K[x]$. Dann ist V ein R-Modul bezüglich

$$f(X) \cdot v := f(A) \cdot v = \sum_{i=0}^{n} c_i A^i(v) \quad \text{für alle } v \in V,$$

wobei $f(X) = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i \in R$ ist (vgl. Übungsblatt 1).

a) A habe das charakteristische Polynom $f_A(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - e_i)$, wobei die $e_i \in K$ alle verschieden sind.
Zeigen Sie, daß dann V ein R-Torsionsmodul ist mit $\mathrm{Ann}(V) = (f_A(x))$ und daß die Primärkomponenten von V gerade die Eigenräume V_{e_i} sind.

b) Bestimmen Sie die Primärzerlegung von V explizit im Falle $n = 2$, $K = \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 27:(*10 Punkte*)

a) Ist M ein Modul über einem Ring R, so ist

$$\mathrm{Aut}(M) := \{\varphi : M \longrightarrow M \mid \varphi \text{ ist Automorphismus}\}$$

bezüglich Komposition eine Gruppe.

b) Betrachten Sie den $\mathbb{Z}$-Modul $M := \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die Gruppe $\mathrm{Aut}(M)$.

c) Seien $p, q \in \mathbb{P}$ zwei verschiedene Primzahlen und $n, m \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen. Bestimmen Sie für den $\mathbb{Z}$-Modul $N := \mathbb{Z}/(p^n \cdot q^m)$ die Gruppe $\mathrm{Aut}(N)$. Wieviele Elemente hat $\mathrm{Aut}(N)$?
Hinweis: Verwenden Sie den chinesichen Restsatz.

Aufgabe 28:(*20 Punkte*)

a) Wieviele nichtisomorphe abelsche Gruppen der Ordnung 200 gibt es? Geben Sie zu jeder dieser Gruppen die Invarianten und die Primärkomponenten an.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $p(n)$ die Anzahl der möglichen Zerlegungen

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r \text{ mit } r, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N} \text{ und } n_1 \geq n_2 \ldots \geq n_r.$$

Z.B. ist $p(4) = 5$, denn $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$.
$p(.)$ heißt *Partitionsfunktion.*
Sei p_1 eine Primzahl und $e_1 \in \mathbb{N}$. Beschreiben Sie die Anzahl nichtisomorpher abelscher Gruppen der Ordnung $p_1^{e_1}$ durch die Partitionsfunktion und geben Sie eine Formel für die Anzahl nichtisomorpher abelscher Gruppen der Ordnung $\prod_{i=1}^{s} p_i^{e_i}$, wobei $e_i \in \mathbb{N}$ und die p_i paarweise verschiedene Primzahlen sind.
Wieviele nichtisomorphe abelsche Gruppen der Ordnung 540000 gibt es?

Aufgabe 29:(*10 Punkte*)
Seien M der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}^3$ und M_1 der von $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\-8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}\right\}$ erzeugte $\mathbb{Z}$-Modul. Bestimmen Sie eine angepaßte Basis für das Paar (M, M_1) und die Invarianten von M/M_1.

Aufgabe 30:(*10 Punkte*) Sei R ein euklidischer Ring mit Absolutnorm N.
Um $A \in \mathrm{Mat}(n, R)$ auf Elementarteilerform zu bringen empfiehlt sich folgendes Verfahren:

(i) Durch Zeilen– und Spaltenumformungen bringt man das Element mit der kleinsten von Null verschiedenen Absolutnorm nach links oben. Die entstehende Matrix sei $(b_{i,j})$.

(ii) Falls es ein $b_{1,j}$ gibt, das nicht durch $b_{1,1}$ teilbar ist, existieren $t, r \in R$ mit $b_{1,j} = t \cdot b_{1,1} + r$ und $N(r) < N(b_{1,1})$.
Man zieht das t-fache der ersten Spalte von der j-ten Spalte ab und geht zurück zu Schritt (i).
Analog, falls es ein $b_{i,1}$ gibt, das nicht durch $b_{1,1}$ teilbar ist.

(iii) Man bringt die Matrix durch Zeilen– und Spaltenumformungen auf die Form

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B' \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Falls ein $b_{i,j}$ nicht durch $b_{1,1}$ teilbar ist, addiert man die i-te Zeile zur ersten und kehrt zu Schritt (ii) zurück.

(iv) Man wendet nun das gleiche Verfahren auf die Matrix B' an.

Zeigen Sie:

a) Das Verfahren hört nach endlich vielen Schritten auf.

b) die enstehende Matrix Q hat Elementarteilerform.

c) Multipliziert man die Zeilenumformungsmatrizen (bzw. Spaltenumformungsmatrizen), so erhält man Matrizen S (bzw. T) aus $\mathrm{GL}(n, R)$ mit $S \cdot A \cdot T = Q$.

d) S^{-1} ist eine angepaßte Basis für (R^n, M), wobei M der von den Spalten von A erzeugte R-Modul ist.

Aufgabe 31:(*10 Punkte*) Sei $R = \mathbb{R}[x]$ und

$$A = \begin{pmatrix} x^3 - x^2 - 13x + 4 & x^4 + x^3 - 17x^2 - 18x + 24 \\ x^2 - 4x & x^3 - 2x^2 - 7x - 4 \end{pmatrix}.$$

Bringen Sie A mit dem Verfahren aus Aufgabe 1 auf Elementarteilerform Q und geben Sie die Matrizen $S, T \in \mathrm{GL}(n, R)$ an mit $Q = S \cdot A \cdot T$.
Geben Sie eine angepaßte Basis an für (R^2, M), wobei M der von den Spalten von A erzeugte R-Modul ist.

Aufgabe 32:(*10 Punkte*) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 18 & 36 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Z}) \ .$$

Bringen Sie A auf Elementarteilerform Q und geben Sie $S, T \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$ an mit $Q = S \cdot A \cdot T$.
Welchen Rang und welche Torsion hat der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}^3/M$, wobei M der von den Spalten von A erzeugte $\mathbb{Z}$-Modul ist?

Aufgabe 33:(*10 Punkte*) Sei $R = \mathbb{R}[x]$ und V der Vektorraum $\mathbb{R}^2$.
Ist $A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$, so hat V eine (von A abhängige) R-Modul-Struktur durch $x \cdot v = A \cdot v$ (vgl. Aufgabe 4 Blatt 6). Bestimmen Sie die Primärkomponenten des R-Moduls V in den Fällen

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Eigenwerte von A.

Aufgabe 34:(*10 Punkte*)
Bestimmen Sie die Minimalpolynome der folgenden reellen Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} -8 & -12 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 8 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 35:(*10 Punkte*)
Sei $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ein Endomorphismus, der bezüglich der Standardbasis durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

dargestellt wird. Zeigen Sie $M_f(x) = P_f(x)$, und geben Sie eine Basis von $\mathbb{R}^4$ an, bezüglich der die Matrix von f die Begleitmatrix von $M_f(x)$ ist.

Aufgabe 36:(*10 Punkte*)

a) Finden Sie kurze Beweise (jeweils höchstens zwei Zeilen) für die folgenden Sätze, die Ihnen aus dem letzten Semester bereits bekannt sind:

(i) Ist $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ eine Matrix, bei der auf und oberhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen, so gilt $A^n = 0$.

(ii) Ist $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ nilpotent, so gilt $A^k = 0$ für ein $k \leq n$.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 8 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $A^8 - 4A^7 - 4A^6 + 4A^5 - 5A^4 + 7A^2$ mit Hilfe des Satzes von Cayley–Hamilton.

Aufgabe 37:(*10 Punkte*)
Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

a) Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathrm{Ker}\,(f^k) = \mathrm{Ker}\,(f^{k+1})$ genau dann, wenn $\mathrm{Im}\,(f^k) = \mathrm{Im}\,(f^{k+1})$ ist.

b) Mit $d = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ker}\,(f^k) = \mathrm{Ker}\,(f^{k+1})\}$ ist $V = \mathrm{Ker}\,(f^d) \oplus \mathrm{Im}\,(f^d)$.

c) Die Voraussetzung, daß V endlich dimensional ist, ist für die in a) und b) getroffenen Aussagen wesentlich.

Aufgabe 38:(*15 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Jordan–Normalformen $\tilde{A}$ bzw. $\tilde{B}$ der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -6 \\ -23 & 1 & -14 \\ 15 & 0 & 10 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5, \mathbb{R}).$$

Hinweis: B ist nilpotent.

b) Betrachten Sie den Endomorphismus $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$, der bezüglich der Standardbasis die Abbildungsmatrix B hat. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^5$ bezüglich der $\tilde{B}$ die Abbildungsmatrix von f ist.

c) Geben Sie eine Matrix $C \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$ an, für die $\tilde{A} = C^{-1} \cdot A \cdot C$ gilt.

Hinweis: Einen Algorithmus zur Bestimmung der Jordan–Normalform und zur Bestimmung der entsprechenden Basis finden Sie unter:
http://www.math.uni-sb.de/~agberger/uebungen/LAII_99/

Aufgabe 39:(*15 Punkte*) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$. Zeigen Sie:

a) Ist $n \leq 3$, so sind die Jordansche Normalform und das Minimalpolynom von A durch die Angabe des charakteristischen Polynoms und die Dimensionen der Eigenräume vollständig bestimmt (bis auf die Reihenfolge der Jordanblocks).

b) Ist $n \leq 3$, so sind die Jordansche Normalform von A und die Dimensionen der Eigenräume durch die Angabe des charakteristischen Polynoms und des Minimalpolynoms vollständig bestimmt (bis auf die Reihenfolge der Jordanblocks).

c) Ist $n \leq 6$, so ist durch die Angabe des charakteristischen Polynoms, des Minimalpolynoms und der Dimensionen der Eigenräume die Jordansche Normalform von A eindeutig bestimmt (bis auf die Reihenfolge der Jordanblocks).

d) Zeigen Sie, daß für $n = 7$ die Angabe des charakteristischen Polynoms, des Minimalpolyunoms und der Dimensionen der Eigenräume nicht mehr ausreicht, um die Jordan–Normalform von A eindeutig zu bestimmen.

Aufgabe 40:(*10 Punkte*) Sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & \alpha & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R}) \ .$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Jordansche Normalform von A_α.

Aufgabe 41:(*10 Punkte*) Welche der komplexen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 8 & -9 & 5 \\ 4 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

sind konjugiert zueinander?

Aufgabe 42:(*10 Punkte*) Der Endomorphismus $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei bezüglich der Standardbasis durch die Abbildungsmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -7 & 11 & -2 \\ -36 & 40 & -7 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die additive und multiplikative Chevalley–Zerlegung von f.

Aufgabe 43:(*10 Punkte*) Sei K ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ und $f(X) \in K[X]$. Zeigen Sie:

a) Die Matrix $f(A)$ ist genau dann invertierbar, wenn $\mathrm{ggT}(f(X), m_A(X)) = 1$ ist, wobei $m_A(X)$ das Minimalpolynom von A bezeichnet.

b) Für $K = \mathbb{Q}$, $f(X) = X^{14} - 5X^{12} + 4X^{10} + X^4 - 4X^2 - 1$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ ist $f(A)$ invertierbar mit $f(A)^{-1} = \frac{1}{2}A^2$.

Aufgabe 44:(*10 Punkte*) Sei K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $n < \infty$. Dann heißt $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ der *Dualraum* von V. Sei

$$\begin{aligned} b : V \times V^* &\longrightarrow K \\ (u, v^*) &\mapsto v^*(u) \ . \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß b eine Bilinearform ist.

b) Seien nun $u \in V$ und $v^* \in V^*$ fest. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} b_u : V^* &\longrightarrow K \\ w^* &\mapsto w^*(u) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} b^*_{v^*} : V &\longrightarrow K \\ x &\mapsto v^*(x) \end{aligned}$$

sind lineare Abbildungen von V^* bzw. V nach K.

c) Zeigen Sie: $V \cong V^*$.

d) Seien $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ und $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie die zur Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ duale Basis von V^*, also eine Basis $B^* = (b_1^*, b_3^*, b_3^*)$ von V^* mit $b(b_i, b_j^*) = \delta_{i,j}$ für alle i, j.

Aufgabe 45:(*16 Punkte*)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Die *Spur(abbildung)* sei gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp} : \mathrm{Mat}(n, K) &\longrightarrow K \\ (a_{i,j}) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \ . \end{aligned}$$

Seien $V = \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$, $\mathcal{E}$ die Standardbasis und $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ mit $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $A_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ sowie

$$\begin{aligned} b : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, C) &\mapsto \mathrm{Sp}(A \cdot C) \ . \end{aligned}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie: b ist symmetrische Bilinearform.

b) Bestimmen Sie die Darstellungmatrix von b bezüglich der Basis $\mathcal{E}$ und die Darstellungmatrix von b bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

c) Ist b positiv semi–definit?

d) Zeigen Sie, daß b nicht ausgeartet ist.

e) Bestimmen Sie den Orthogonalraum zu dem Erzeugnis von $\{A_1, A_2, A_3\}$.

Aufgabe 46:(*12 Punkte*)
Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$. Zeigen Sie:

a) Sind $v_1, \ldots, v_r$ paarweise orthogonale Vektoren, so ist $\{v_1, \ldots, v_r\}$ linear unabhängig.

b) Sind die $(v_1, \ldots, v_r)$ ein Orthonormalsystem und ist $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$ ein Vektor aus V, so ist $\lambda_i = \langle v, v_i \rangle$.

c) Sind die $(v_1, \ldots, v_r)$ ein Orthonormalsystem, so ist $(v_1, \ldots, v_r)$ genau dann eine Orthonormalbasis, wenn

$$v = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle \cdot v_i$$

für alle $v \in V$ gilt.

Aufgabe 47:(*12 Punkte*)
Sei $V = \mathbb{C}^2$. Weiter sei $h : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ bezüglich der Standardbasis durch $h(x, y) = x^T H y$ gegeben mit

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 4 \end{pmatrix} .$$

a) Zeigen Sie, daß h eine hermitesche Bilinearform ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von V, bezüglich der die Darstellungsmatrix von h Diagonalform hat.

Aufgabe 48:(*10 Punkte*)

a) Sei $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, daß G vermittels

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times G & \longrightarrow & G \\ (z, g) & \mapsto & g^z \end{array}$$

zu einem $\mathbb{Z}$-Modul wird.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $G := \{e^{\frac{2\pi i k}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$. Zeigen Sie:

(i) $(G, \cdot)$ ist $\mathbb{Z}$-Torsionsmodul.

(ii) $(G, \cdot)$ ist zyklischer $\mathbb{Z}$-Modul.

(iii) Ein Element $g \in G$ ist genau dann ein Erzeuger von G, wenn $g = e^{\frac{2\pi i m}{n}}$ und $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ ist.

Aufgabe 49:(*10 Punkte*)
Seien p eine Primzahl und $f \in \mathbb{F}_p[x]$ ein Polynom vom Grad $\deg(f) = n \in \mathbb{N}$.

a) Zerlegen Sie den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{F}_p[x]/(f)$ in zyklische Komponenten.

b) Zeigen Sie: Der Ring $\mathbb{F}_p[x]/(f)$ hat Nullteiler genau dann, wenn f nicht irreduzibel ist.

Aufgabe 50:(*10 Punkte*)
Geben Sie alle Automorphismen von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ explizit an.

Aufgabe 51:(*10 Punkte*)
Sei M der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}^3$. Sei M_2 der von $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$ erzeugte $\mathbb{Z}$-Modul. Bestimmen Sie die Invarianten von M/M_2.

Aufgabe 52:(*10 Punkte*)

a) Geben Sie alle Lösungen der simultanen Kongruenz an:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \bmod 5 \\ x &\equiv 5 \bmod 6 \\ x &\equiv 1 \bmod 7 . \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie einen Gruppenhomomorphimus (der von der Nullabbildung verschieden ist) von $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ sowie einen in umgekehrter Richtung.

c) Zeigen Sie, daß es keinen surjektiven Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ und auch keinen in die umgekehrte Richtung gibt.

Hinweis: Verwenden Sie den chinesischen Restsatz.

Aufgabe 53:(*10 Punkte*)
Sei

$$B := \begin{pmatrix} x^3 - x^2 & x^2 - 1 \\ x^2 - x & x^3 - 2x^2 + x \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{Q}[x]).$$

Bestimmen Sie Matrizen $U, V \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}[x])$ so, daß die Matrix $U \cdot B \cdot V$ Elementarteilerform hat. Bestimmen Sie eine angepaßte Basis von $(\mathbb{Q}[x]^2, M)$, wobei M der von den Spalten von B erzeugte $\mathbb{Q}[x]$-Untermodul ist.

Aufgabe 54:(*10 Punkte*)
Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$. Zeigen Sie:
f ist genau dann nilpotent, wenn f keine von Null verschiedenen Eigenwerte hat.
Gilt diese Aussage auch für $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$?

Aufgabe 55:(*10 Punkte*) Bestimmen Sie die additive Chevalley–Zerlegung der rellen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 56:(*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie bis auf Konjugation alle nilpotenten Matrizen aus $\mathrm{Mat}(4, \mathbb{C})$.

b) Bestimmen Sie die Jordan–Normalform $\tilde{A}$ folgender nilpotenter Matrix und geben Sie das Minimalpolynom an:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$$

c) Geben Sie eine Matrix $C \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$ an, für die $\tilde{A} = C^{-1} \cdot A \cdot C$ gilt.

Aufgabe 57:(*10 Punkte*) Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) \leq 2\}$ und

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

a) Zeigen Sie, daß $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V ist.

b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von V.