Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

(Blatt 3)

Hauptklausur zur Linearen Algebra II im SS 2015

Aufgabe 2. *(10 = 5 + 5 Punkte)*
Es sei R der Polynomring $\mathbb{Q}[X]$ über dem Körper $\mathbb{Q}$.

a) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler $h = \mathrm{ggt}(f, g)$ für

$$\begin{aligned} f(X) &= X^7 - 1, \\ g(X) &= X^5 - X^4 + X - 1\,. \end{aligned}$$

b) Finden Sie alle Lösungen $f \in R$ der Kongruenzen

$$\begin{aligned} f &\equiv 5X + 6 \pmod{X^2 - 2} \\ f &\equiv X + 1 \pmod{X^2 + X + 1}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. *(10 = 2 + 2 + 6 Punkte)*
Zerlegen Sie die abelschen Gruppen M in primäre Komponenten und bestimmen Sie die Elementarteiler.

a) $M = \mathbb{Z}/40 \times \mathbb{Z}/54 \times \mathbb{Z}/900 \times \mathbb{Z}/392$.

b) $M = \mathbb{Z}/192 \times \mathbb{Z}/108$.

c) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}\,.$$

Finden Sie $S, T \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$, so dass SAT Elementarteilergestalt hat.

Aufgabe 4. *(10 = 3 + 2 + 5 Punkte)*
Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass A über $\mathbb{R}$ eine Jordan-Normalform besitzt,

b) bestimmen Sie diese, und

c) finden Sie $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $A' = C^{-1}AC$ Jordan-Normalform hat.

Aufgabe 5. *(10 = 3 + 3 + 4 Punkte)*
Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(T)$ und Minimalpolynom $p_A(T)$.
Welche Jordan-Normalformen und Minimalpolynome kommen in Betracht für

a) $n = 6$, $\chi_A(T) = (T-1)^3(T+1)^2(T-2)$;

b) $n = 10$, $\chi_A(T) = (T-1)^7(T+1)^2(T-2)$, $\dim(V_1) = 3$;

c) $n = 10$, $\chi_A(T) = (T-1)^7(T+1)^2(T-2)$, $\dim\ker(A - E_{10})^2 = 4$.

(Eine Jordan-Normalform wird beschrieben durch die auftretenden Jordan-Blöcke $J(\lambda, e)$ und deren Vielfachheiten; V_1 ist der Eigenraum zum Eigenwert 1 und E_n ist die $n \times n$ Einheitsmatrix.)

Aufgabe 6. *(10 = 2 + 3 + 5 Punkte)*
Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$.
Für zwei feste Vektoren $v, w \in V$ sei $\phi_{v,w} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ gegeben durch

$$\phi_{v,w}(x) = \langle v, x\rangle\, w - \langle w, x\rangle\, v\,.$$

a) Berechnen Sie $\langle x, \phi_{v,w}(x)\rangle$ für $x \in V$.

b) Unter welcher Bedingung an v, w ist $\phi_{v,w}$ selbstadjungiert?

c) Bestimmen Sie die adjungierte Abbildung $(\phi_{v,w})^*$.

Viel Erfolg !