Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

NORMALFORM UND JORDANSCHE NORMALFORM

Gegeben sei eine Matrix $A \in K^{n\times n}$, die auf $V := K^n$ durch Multiplikation operiert und V zum R-Modul macht ($R := K[T]$). Dabei ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Für $\lambda \in K$ ist die p-primäre Komponente $V(p)$ für $p := T - \lambda \in R$ gerade der Hauptraum

$$\widetilde{V}_\lambda := \{v \in V \mid \exists\, e \in \mathbb{N} : (A-\lambda)^e(v) = 0\}.$$

Jedes $\widetilde{V}_\lambda$ lässt sich in (i.a. mehrere) zyklische Komponenten der Dimensionen $e_{\lambda,j}$ $(1 \leq j \leq t_\lambda)$ zerlegen. Aus den zugehörigen Zahlen $e_{\lambda,j}$ lässt sich sowohl die Jordansche Normalform JNF(A) als auch die "Normalform" NF(A) berechnen.

Wir stellen nochmal die Definitionen und Beziehungen zusammen.

Seien $\chi_A(T)$ bzw. $p_A(T)$ das charakteristische Polynom bzw. das Minimalpolynom von A. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ die verschiedenen Eigenwerte von A. Dann ist

$$\chi_A(T) = \prod_{1\leq i\leq s} (T-\lambda_i)^{n_i}$$

(1)

$$\text{mit } n_i = \dim \widetilde{V}_{\lambda_i} \text{ und } V = \bigoplus_{1\leq i\leq s} \widetilde{V}_{\lambda_i}.$$

Für jedes i sei t_i die Zahl der zyklischen Komponenten von $\widetilde{V}_{\lambda_i}$ und $e_{i,j} := e_{\lambda_{i,j}}$ die Dimension der j-ten zyklischen Komponente $(1 \leq j \leq t_i)$ zu diesem λ_i. Jede dieser Komponenten entspricht einem Jordan-Block $J(\lambda_i, e_{i,j})$ der Länge $e_{i,j}$. Wir ordnen für jedes i die $e_{i,j}$ absteigend

$$e_{i,1} \geq e_{i,2} \geq \cdots \geq e_{e,t_i} \geq 1. \tag{2}$$

Weiter definieren wir $t := \max\{t_i \mid 1 \leq i \leq s\}$ und setzen für $t_i < t$ und $t_i < j \leq t$:

$$e_{i,j} = 0$$

(damit die nachfolgenden Formeln definiert sind).

Die Jordansche Normalform JNF(A) von A ist dann die Matrix

$$\mathrm{JNF}(A) = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{pmatrix} \tag{3}$$

Hierbei sind gewisse quadratische Matrizen $A_1, \ldots, A_s$ längs der Diagonalen aufgereiht; außerhalb dieser $A_1, \ldots, A_s$ sind alle Einträge 0. Die A_i entsprechen den verschiedenen $\widetilde{V}_{\lambda_i}$ (sie sind bzgl. einer geeigneten Basis die Matrizen von $A|_{\widetilde{V}_{\lambda_i}}$). Jedes A_i hat die Gestalt

$$A_i = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, e_{i,1}) & & & 0 \\ & J(\lambda_i, e_{i,2}) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J(\lambda_i, e_{i,t_i}) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Dabei stehen hier außerhalb der diagonal aufgereihten Jordan-Blocks nur Nullen; die Blocks sind wegen (2) der Größe nach absteigend angeordnet.

JNF(A) ist nicht ganz eindeutig festgelegt, sondern nur bis auf Vertauschung der A_i (und, wenn man auf die Bedingung (2) verzichtet, bis auf Vertauschung der verschiedenen Blocks innerhalb von A_i).

Wir betrachten Jordan-Matrizen der Gestalt (3) nicht als "wesentlich" verschieden, wenn sie durch solche Umordnungen auseinander hervorgehen. Dann (d.h. bis auf evtl. derartige Umordnungen) ist die Kenntnis von JNF(A) äquivalent zur Kenntnis aller λ_i, der zugehörigen t_i und aller $e_{i,j}$ $(1 \leq i \leq t_i)$.

Wie erhalten wir daraus die "Normalform" NF(A)? Diese hat die Gestalt

$$\mathrm{NF}(A) = \begin{pmatrix} B_{q_1} & & & 0 \\ & B_{q_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_{q_t} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Hier sind die B_{q_j} $(1 \leq j \leq t)$ Begleitmatrizen der Polynome q_j, wobei

$$q_j(T) = \prod_{1 \leq i \leq s} (T - \lambda_i)^{e_{i,j}}. \tag{6}$$

Wegen (2) ist dann $q_t \mid q_{t-1} \mid \cdots \mid q_1$.

Die Begleitmatrix des *normierten* Polynoms $q(T) = T^k + \sum_{0 \le i \le k-1} \beta_i T^i$ ist die $k \times k$-Matrix

$$B_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\beta_0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots & -\beta_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -\beta_{k-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -\beta_{k-1} \end{pmatrix}$$

Die Normalform $\mathrm{NF}(A)$ von A ist durch $(5), (6)$ und (2) eindeutig festgelegt. Mit diesen Bezeichnungen ist dann

$$p_A(T) = q_1(T).$$

D.h. p_A enthält die Information über den jeweils größten Jordan-Block $J(\lambda_i, e_{i,1})$ zu allen λ_i.

Wie erhalten wir $\mathrm{JNF}(A)$ aus $\mathrm{NF}(A)$, und wie finden wir überhaupt die Zahlen $e_{i,j}$?

(8) Eine zyklische Komponente Z von $\widetilde{V}_{\lambda_i}$ (sie möge zum Block $J(\lambda_i, e_{i,j})$ gehören) habe K-Dimension $r := e_{i,j}$. Ein solches Z besitzt eine ausgezeichnete Folge von K-Untervektorräumen (und sogar R-Untermoduln)

$$\{0\} \subsetneqq Z_1 \subsetneqq Z_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq Z_r = Z$$

mit $\dim_{\mathbb{C}}(Z_k) = k$ für alle k, nämlich

$$Z_k = \ker((A - \lambda_i)^k|_Z).$$

Mit den Bezeichnungen aus (3.1.7) der Vorlesung ist dann

$$\begin{array}{lcl} Z_1 & = & \langle v_r \rangle = K v_r \\ Z_2 & = & \langle v_r, v_{r-1} \rangle = K v_r + K v_{r-1} \\ & \vdots & \\ Z_{r-1} & = & \langle v_r, v_{r-1}, \dots, v_2 \rangle \\ Z_r & = & \langle v_r, \dots, v_1 \rangle = Z. \end{array}$$

Es ist $\ker((A-\lambda_i)^k|_{\widetilde{V}_{\lambda_i}}) = \ker((A-\lambda_i)^k)$, und die Dimension davon vergrößert sich nicht weiter, wenn $k \geq e_{i,1}$ = Länge des größten Jordan-Blocks zu λ_i ist. Das heißt

$$\widetilde{V}_{\lambda_i} = \ker((A-\lambda_i)^{e_{i,1}}) = \ker((A-\lambda_i)^k) \text{ für } k \geq e_{i,1}. \tag{9}$$

Jede der t_i zyklischen Komponenten Z von $\widetilde{V}_{\lambda_i}$ trägt also mit 1 bei zu

$$\dim \ker((A-\lambda_i)^{k+1}) - \dim \ker((A-\lambda_i)^k),$$

falls $r = \dim_{\mathbb{C}}(Z) \geq k+1$ ist, und mit 0 andernfalls. Anders ausgedrückt

$$\begin{aligned} &\dim \ker((A-\lambda_i)^{k+i}) - \dim \ker((A-\lambda_i)^k) \\ &\qquad = \#\{j \mid 1 \leq j \leq t_i,\, e_{i,j} > k\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Insbesondere

$$\dim \ker(A-\lambda_i) = \text{Zahl der Komponenten in } \widetilde{V}_{\lambda_i} = t_i, \tag{11}$$

($\ker(A-\lambda_i)$ ist der Eigenraum V_{λ_i} zu λ_i.)

$$\#\{j \mid e_{i,j} \geq 2\} = \dim \ker((A-\lambda_i)^2) - t_i, \tag{12}$$

$\vdots$

was uns erlaubt, die $e_{i,j}$ rekursiv auszurechnen (i fest, j läuft), wenn wir alle $\dim \ker((A-\lambda_i)^k)$ kennen.

An dieser Rechnung (d.h. der Rangbestimmung der Matrizen $(A-\lambda_i)^k$ für schlimmstenfalls $k = n_i = \dim \widetilde{V}_{\lambda_i}$ = Vielfachheit von λ_i als Nullstelle von $\chi_A(T)$) führt kein Weg vorbei.

In der Praxis tritt das Problem aber meistens nur für $k=1$ oder 2 auf, so dass sich der Aufwand in Grenzen hält.

Wir schließen mit einem Beispiel (eher theoretischer Natur).

Die Matrix $A \in K^{14\times 14}$ habe 3 verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, die zugehörigen Zahlen $e_{i,j}$ seien:

$$\begin{aligned} e_{1,j} &: 3,2,1 \\ e_{2,j} &: 1,1 \\ e_{3,j} &: 2,2,1,1 \end{aligned}$$

Es ist $t=4$, und wir ergänzen durch Nullen zu

(13)

3	2	1	0
1	1	0	0
2	2	1	1

In JNF(A) treten die Jordan-Blöcke

$J(\lambda_1, 3),\ J(\lambda_1, 2),\ J(\lambda_1, 1)$	jeweils einfach
$J(\lambda_2, 1)$	doppelt
$J(\lambda_3, 2)$ und $J(\lambda_3, 1)$	jeweils doppelt

auf.

In NF(A) treten die Begleitmatrizen B_{q_j} $(1 \leq j \leq 4)$ auf mit

$$\begin{aligned} q_1 &= (T-\lambda_1)^3(T-\lambda_2)(T-\lambda_3)^2 \\ q_2 &= (T-\lambda_1)^2(T-\lambda_2)(T-\lambda_3)^2 \\ q_3 &= (T-\lambda_1)(T-\lambda_3) \\ q_4 &= (T-\lambda_3). \end{aligned}$$

Ist JNF(A) gegeben, so "sehen" wir die $e_{i,j}$ und gewinnen mit (6) die q_j, also NF(A).

Ist umgekehrt NF(A) gegeben (d.h. die q_j), so erhalten wir die $e_{i,j}$ (d.h. die Matrix (13) und daraus JNF(A)) durch Zerlegung der q_j in Linearfaktoren.

Wir können noch mehr ablesen, z.B.

$$\begin{array}{lcllcl} \dim \widetilde{V}_{\lambda_1} &=& \dim \ker((A-\lambda_1)^3) &=& 6 \\ && \dim \ker((A-\lambda_1)^2) &=& 5 \\ \dim V_{\lambda_1} &=& \dim \ker(A-\lambda_1) &=& 3 \\ \dim \widetilde{V}_{\lambda_2} &=& \dim \ker((A-\lambda_2)^2) &=& 2 \\ \dim V_{\lambda_2} &=& \dim \ker(A-\lambda_2) &=& 2 \\ \dim \widetilde{V}_{\lambda_3} &=& \dim \ker((A-\lambda_3)^2) &=& 6 \\ \dim V_{\lambda_3} &=& \dim \ker(A-\lambda_3) &=& 4, \end{array}$$

und die Kenntnis dieser Zahlen ist äquivalent zur Kenntnis von JNF(A) und NF(A).