Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

(Blatt 3)

Probeklausur zur Linearen Algebra II im SS 2015

Aufgabe 2. *(10 = 5 + 5 Punkte)*
Es sei R der Polynomring $\mathbb{F}_5[X]$ über dem Körper $\mathbb{F}_5$ mit 5 Elementen. Wir schreiben $0, 1, 2, 3, 4$ für die Elemente von $\mathbb{F}_5$.

a) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler $h = \mathrm{ggt}(f, g)$ für

$$\begin{aligned} f(X) &= X^4 + 4X^3 + 3X^2 - 2X^2 - 3X - 1, \\ g(X) &= X^3 + 2X^2 - 2X + 2\,. \end{aligned}$$

b) Finden Sie alle Lösungen $f \in R$ der Kongruenzen

$$\begin{aligned} f &\equiv 1 \pmod{X^2 - 2} \\ f &\equiv X + 1 \pmod{X^2 + X + 1}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. *(10 = 2 + 2 + 6 Punkte)*
Zerlegen Sie die abelschen Gruppen M in primäre Komponenten und bestimmen Sie die Elementarteiler.

a) $M = \mathbb{Z}/48 \times \mathbb{Z}/20 \times \mathbb{Z}/49 \times \mathbb{Z}/270$.

b) $M = \mathbb{Z}/160 \times \mathbb{Z}/38 \times \mathbb{Z}/100$.

c) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}\,.$$

Finden Sie $S, T \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, so dass SAT Elementarteilergestalt hat.

Aufgabe 4. *(10 Punkte)*
Überprüfen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4},$$

eine Jordan-Normalform hat und bestimmen Sie eine Basis, bezüglich der A Jordan-Normalform annimmt.

Aufgabe 5. *(10 = 3 + 3 + 4 Punkte)*
Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(T)$ und Minimalpolynom $p_A(T)$. Welche Jordan-Normalformen kommen in Betracht für

a) $n = 12,\ \begin{array}{rcl} \chi_A(T) & = & (T+2)^8(T-1)^3(T+1) \\ p_A(T) & = & (T+2)^3(T-1)^2(T+1) \end{array};$

b) $n = 8,\ \begin{array}{rcl} \chi_A(T) & = & (T-1)^5(T+1)^3 \\ p_A(T) & = & (T-1)^3(T+1)^2 \end{array}.$

(Eine Jordan-Normalform wird beschrieben durch die auftretenden Jordan-Blöcke $J(\lambda, e)$ und deren Vielfachheiten.)

c) Um zu entscheiden, welche Jordan-Normalform vorliegt, müssen Sie die Ränge $\mathrm{rg}((A - \lambda E_n)^i)$ für gewisse $\lambda \in \mathbb{C}$ und $i = 1, 2, \ldots$ bestimmen.
Für welche (λ, i) müssen Sie dies tun in a) bzw. b) ?

Aufgabe 6. *(10 = 5 + 5 Punkte)*
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit Skalarprodukt $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit Adjungierter f^*.

a) Zeigen Sie: Ist $U \subset V$ ein Unterraum, so gilt:

$$f(U) \subset U \Longleftrightarrow f^*(U^\perp) \subset U^\perp\,.$$

b) Sei $v \in V$ und $g \in \mathrm{End}_K(V)$ gegeben durch $g(x) = \langle x, v\rangle\, v$.
Bestimmen Sie die Adjungierte f^*.

Viel Erfolg !