Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Saarbrücken, den 24.07.2015

(Blatt 1)

Probeklausur zur Linearen Algebra II, SS 2015

Die Aufgabenstellungen umfassen sechs Seiten auf drei Blättern.
Überprüfen Sie dies und ergänzen Sie nachfolgend Ihren Namen!

Name, Vorname: ________

Aufgabe 1.
Es folgen 40 Aussagen, die jeweils **entweder immer richtig (R) oder (manchmal oder immer) falsch (F)** sind. Setzen Sie entsprechend "R" oder "F" in die Kästchen ein.
Sie erhalten $\max\{0; k-20\}$ Punkte für diese Aufgabe, wobei k die Zahl Ihrer korrekten Antworten ist.

Diese Aufgabe wird bereits um 10:30 Uhr eingesammelt!

a) **Ringe und Moduln**

Es sei R ein Ring, M, N seien $R-$Moduln, $U \subset M$ sei ein Untermodul und $\phi : M \to N$ ein Homomorphismus.

- ☐ $\{y \in N \mid \exists\, x \in U : \phi(x) = y\}$ ist ein Untermodul von N.
- ☐ Ist ϕ surjektiv und erfüllt $ker(\phi) \cap U = \{0\}$, so ist ϕ ein Isomorphismus.
- ☐ Ist $\pi : M \to M/U$ der Restklassenhomomorphismus, so existiert ein Homomorphismus $\psi : M/U \to M$ mit $\pi \circ \psi = id_{M/U}$.
- ☐ Ist $\phi|_U = 0$, so gibt es einen Homomorphismus $\overline{\phi} : M/U \to N$ mit $\phi = \overline{\phi} \circ \pi$.
- ☐ $\mathrm{End}(M) := \{\phi \mid \phi \text{ ist Homomorphismus von } M \text{ in sich}\}$ ist bezüglich der Komposition als Multiplikation ein Ring.

b) **(Lineare) Unabhängigkeit**

Es sei R ein Ring, M, N seien R-Moduln, $S \subset M$ eine Teilmenge mit Erzeugnis $\langle S \rangle$.

- ☐ Ist $\langle S \rangle = M$, so kann aus S eine Basis von M gewählt werden.
- ☐ Ist S unabhängig, so ist S linear unabhängig.
- ☐ S ist eine Basis von M genau dann, wenn es eine minimale erzeugende Teilmenge von M ist.
- ☐ Ist S eine Basis, so besitzt jedes $x \in M$ eine eindeutig bestimmte Darstellung als Linearkombination aus S.

c) **Ideale**

Es sei R ein Ring und $S \subset R$ eine Teilmenge.

- ☐ Ist $\phi : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus, so ist $ker(\phi)$ ein Ideal von R.
- ☐ $\{rsr' \mid r, r' \in R, s \in S\}$ ist das kleinste Ideal von R, das S enthält.
- ☐ Ist R ein Körper, so hat R genau ein Ideal.

d) **Hauptidealringe**

Es sei R ein Hauptidealring, $a, b \in R$, (a) das von a erzeugte Ideal, $a|b$ die Teilbarkeitsrelation.

- ☐ a ist Einheit $\iff (a) = R$.
- ☐ $b \in (a) \iff b|a$.
- ☐ a ist Primelement $\iff R/(a)$ ist Körper.
- ☐ $R^* = \{e \in R \mid e \text{ ist Einheit}\}$ ist endlich.

e) **Moduln über Hauptidealringen**

Es sei R ein Hauptidealring, M ein R-Modul, $x \in M$, $\mathrm{Ann}(x) := \{\alpha \in R \mid \alpha x = 0\}$, $\mathrm{Tor}(M) := \{x \in M \mid x \text{ ist Torsionselement}\}$.

☐ Ist M endlich erzeugt, so ist $M/\mathrm{Tor}(M)$ frei.

☐ Ist M Torsionsmodul, so ist M endlich erzeugt.

☐ $\mathrm{Ann}(x)$ ist ein Unterring von R.

f) **Endlich erzeugte Torsionsmoduln**

Es sei R ein Hauptidealring, $M \neq \{0\}$ ein endlich erzeugter R-Torsionsmodul mit Annullator $\mathrm{Ann}(M)$, $\mathcal{P} := \{p, q, ...\}$ ein Repräsentantensystem von Primelementen von R modulo Assoziiertheit.

☐ Für $p \in \mathcal{P}$ ist die $p-$primäre Komponente $M(p)$ von M definiert als

$$\{x \in M \mid px = 0\}\,.$$

☐ Für paarweise verschiedene $p_1, p_2, ..., p_r \in \mathcal{P}$ ist

$$\sum_{1 \leq i \leq r} M(p_i) = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} M(p_i).$$

☐ Ist M p-primär, so gibt es eine Zerlegung der Form $M = \langle x_1 \rangle \oplus ... \oplus \langle x_t \rangle$ mit $\langle x_i \rangle \simeq R/(p^{e_i})$, wobei $t \in \mathbb{N}$ und $e_1, e_2, ..., e_t$ mit $1 \leq e_1 \leq ... \leq e_t$ durch M eindeutig bestimmt sind.

☐ Ist M zyklisch, so ist M p-primär für wenigstens ein $p \in \mathcal{P}$.

☐ $\mathrm{Ann}(M) \subseteq (p) \Rightarrow M(p) \neq \{0\}$.

☐ Ist U ein Untermodul von M, so ist $\mathrm{Ann}(U) \subset \mathrm{Ann}(M)$.

g) **Elementarteiler**

Es sei R ein Hauptidealring, M ein endlich erzeugter freier R-Modul, $N \subset M$ ein Untermodul.

☐ N ist frei und es gilt $rg(N) \leq rg(M)$.

☐ $rg(N) = rg(M) \Longleftrightarrow M/N$ ist Torsionsmodul.

☐ Es gibt eine Basis von N, die zu einer Basis von M ergänzt werden kann.

h) **Normalformen und Endomorphismen**

Es sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum ($n \geq 1$), $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit charakteristischem Polynom $\chi_f(T)$ und Minimalpolynom $p_f(T)$, der bezüglich einer Basis von V durch $A \in K^{n \times n}$ beschrieben wird. Ferner seien $q_1, q_2, ..., q_t$ die Elementarteiler von f (normierte Polynome mit $q_1|q_2|...|q_t$) und V_λ bzw. $\widetilde{V_\lambda}$ der Eigenraum bzw. Hauptraum von f zum Eigenwert $\lambda \in K$.

- ☐ $\chi_f | p_f$.
- ☐ $p_f = q_t$.
- ☐ $\chi_f = \prod_{1 \leq i \leq t} q_i$.
- ☐ Für alle$\lambda \in K : \widetilde{V_\lambda} \subset V_\lambda$.
- ☐ $\widetilde{V_\lambda} = \{x \in V \,|\, (f - \lambda id_V)^n(x) = 0\}$.

Für die verbleibenden Fragen sei K algebraisch abgeschlossen und A in Jordan'scher Normalform.

- ☐ dim V_λ ist die Zahl der Jordan-Blocks $J(e, \lambda)$ zu λ in A.
- ☐ $V = \oplus_{\lambda \in K} V_\lambda$
- ☐ dim $\widetilde{V_\lambda}$ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle von χ_f.

i) **Skalarprodukte**

$\mathbb{K}$ sei einer der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $\overline{(\,.\,)}$ die komplexe Konjugation, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, versehen mit einem (reellen oder komplexen) Skalarprodukt $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ und zugehöriger Norm $\|\,.\,\|$. Weiter seien f, g Endomorphismen von V mit Adjungierten f^*, g^*.

- ☐ Für $x, y \in V$ mit $\langle x, y \rangle = 0$ ist $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$.
- ☐ Für $x, y \in V$ gilt stets $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.
- ☐ Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\overline{A} = A^t$ ist diagonalisierbar.
- ☐ Für die adjungierten Endomorphismen gilt $(f \circ g)^* = f^* \circ g^*$.