

Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp



1. Übung zur Linearen Algebra II, SS 2015

lichtung
manche meinen
lechts und links
kann man nicht
verwechsellern
werch ein illtum!
(Ernst Jandl)

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Für einen Ring R sei $Z(R) := \{x \in R \mid \forall y \in R : xy = yx\}$ das Zentrum von R .

- (i) Zeigen Sie: $Z(R)$ ist ein Unterring von R .
- (ii) Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $R := \text{End}_K(V)$ der Ring aller K -Endomorphismen von V . Bestimmen Sie $Z(R)$.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Es sei R ein beliebiger Ring und M, N seien R -Moduln. $\text{Hom}_R(M, N)$ bezeichne die Menge der R -Modulhomomorphismen vom M nach N .

Zeigen Sie:

- (i) Für $\alpha \in R$ ist die Multiplikationsabbildung

$$\begin{aligned} m_\alpha : M &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto \alpha x \end{aligned}$$

ein R -Modulhomomorphismus von M nach M .

- (ii) $\text{Hom}_R(M, N)$ ist mit argumentweisen Verknüpfungen ein R -Modul.

Aufgabe 3. (20 Punkte)

Es sei $R = \text{End}_K(V)$ der Ring aus Aufgabe 1 und U ein K -Untervektorraum von V .

- (i) Zeigen Sie: V wird durch die "Skalarmultiplikation"

$$\begin{aligned} R \times V &\longrightarrow V \\ (\phi, x) &\longmapsto \phi(x) \end{aligned}$$

zum R -Modul.

- (ii) Zeigen Sie: V besitzt nur die trivialen R -Untermoduln $\{0\}$ und V .
- (iii) Bestimmen Sie die R -Endomorphismen von V (d.h. die R -Modulhomomorphismen von V nach V).

Falls Sie die Aufgaben gelöst haben, haben Sie mindestens zwei falsche Aussagen bewiesen. Welche? Durch welche Korrekturen können Sie die Aussagen (und ihre aufgewendete Mühe) retten?

Abgabe bis Montag, den 04.05.2015 vor der Vorlesung in die Briefkästen