Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

10. Übung zur Linearen Algebra II, SS 2015

Aufgabe 1. *(2 + 10 + 3 + 5 = 20 Punkte)*
Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, V der K-Vektorraum $K^{m\times n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, $R = K[T]$.
Für $A \in K^{m\times m}$ sei

$$l = l_a : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ B & \longmapsto & AB \end{array}$$

die Linksmultiplikation mit A. Wir nehmen an, dass die Jordan'sche Normalform (und damit die Elementarteilerdaten sowie p_A, χ_A) von A bekannt sind.
(i) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $p_l(T)$ von l.
(ii) Welche Jordan-Blocks treten in der Jordan'schen Normalform von l mit welchen Vielfachheiten auf?
(iii) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_l(T)$ von l.

Hinweis: Fassen Sie K^m vermöge A, V vermöge l als R-Moduln auf und zeigen Sie die Isomorphie von R-Moduln $V \cong (K^m)^n = K^m \times \cdots \times K^m$.

Sei jetzt $C \in K^{n\times n}$ und

$$r = r_C : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ B & \longmapsto & BC \end{array}$$

die Rechtsmultiplikation mit C.
(iv) Machen Sie unter Voraussetzung von $(i), (ii), (iii)$ entsprechende Aussagen über den Endomorphismus v von V.

— BITTE WENDEN —

Aufgabe 2. *(4 + 3 + 3 = 10 Punkte)*
(Beweis von Proposition 4.1.9 der Vorlesung)
Es sei V ein reeller Vektorraum und $f : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform.
Zeigen Sie:
(i) Es existiert eine wohldefinierte $\mathbb{C}$-Bilinearform $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}}$ mit $f\,|_{V \times V} = f$.
(ii) Ist $X = \{x_1, \ldots x_n\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von V (also eine $\mathbb{C}$-Basis von $V_{\mathbb{C}}$), so ist $f_{\mathbb{C}}$ bezüglich X durch diesselbe Matrix gegeben, wie f bezüglich X.
(iii) f ist (anti-) symmetrisch genau dann, wenn $f_{\mathbb{C}}$ (anti-) symmetrisch ist.

Aufgabe 3. *(10 Punkte)*
Es sei $W = \{(\pm 1; \pm 1; \pm 1)\}$ die Menge der acht Eckpunkte des Einheitswürfels im dreidimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt.
Berechnen Sie die Projektion von W auf die Ebene

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

und die Winkel zwischen den Bildpunkten.

Abgabe bis Freitag, den 03.07.2015 vor der Vorlesung in die Briefkästen