Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

11. Übung zur Linearen Algebra II, SS 2015

Aufgabe 1. *(5 + 5 = 10 Punkte)*
(i) Sind die folgenden Teilmengen des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^{n\times n}$ lineare Unterräume? Falls nicht, welche andere Struktur tragen sie jeweils?

- $\mathbb{R}^{n\times n}$;
- $\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A \text{ symmetrisch}\}$;
- $\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A \text{ hermitesch}\}$.

(ii) Sei U ein zweidimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{C}^3$.
Zeigen Sie, dass $U \cap \mathbb{R}^3 \neq \{0\}$ und $\mathbb{R}^3 \nsubseteq U$ gilt.

Aufgabe 2. *(10 Punkte)*
Gegeben sei ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V.
Eine *reelle Struktur* auf V ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $c : V \to V$ mit

- für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, für alle $v \in V$: $c(\lambda v) = \overline{\lambda} \cdot c(v)$ und
- c ist eine Involution, d.h. $c^2 = \mathrm{id}_V$.

Sei U ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V.
Zeigen Sie:
V ist genau dann die Komplexifizierung von U (bzw. kanonisch isomorph dazu), wenn es eine reelle Strukur c auf V gibt mit $c\,|_U = \mathrm{id}_U$.

— BITTE WENDEN —

Aufgabe 3. *(5 + 5 +10 = 20 Punkte)*
Bekanntlich wird durch

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}[X]$ definiert.
Das n-te *Legendre-Polynom* P_n wird durch

- P_n hat Grad n ;
- $P_n(1) = 1$;
- alle Legendre-Polynome stehen paarweise orthogonal aufeinander;

definiert.
(i) Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome dadurch wohldefiniert sind.
(ii) Bestimmen Sie P_0 bis P_4.
(iii) Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome einer linearen Rekursion der Tiefe 2 genügen, d.h. finden Sie für jedes $n > 1$ Polynome $S_n, T_n \in \mathbb{C}[X]$ mit

$$P_n = S_n P_{n-1} + T_n P_{n-2}\,.$$

Abgabe bis Freitag, den 10.07.2015 vor der Vorlesung in die Briefkästen