Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

12. Übung zur Linearen Algebra II, SS 2015

Aufgabe 1. *(10 Punkte)*
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und f eine lineare Abbildung mit $\langle v, f(v)\rangle = 0$ für alle $v \in V$.
Zeigen Sie, dass $f = 0$ ist.
Gilt die Aussage auch für $\mathbb{R}$-Vektorräume? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

Aufgabe 2. *(1 + 3 + 6 = 10 Punkte)*
Es sei $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) := \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$.
(i) Zeigen Sie, dass $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.
(ii) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(AB^\star)$$

ein Skalarprodukt auf $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ definiert wird.
(iii) Die folgenden drei Matrizen bilden eine Basis von $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$:

- $B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- $B_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;
- $B_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie aus diesen mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthonormalbasis von $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$.

— BITTE WENDEN —

Aufgabe 3. *(10 + 10 = 20 Punkte)*
(i) Eine physikalische Größe Y hängt von der Größe X ab durch $Y = aX + b$ mit unbekannten Konstanten a, b. Die Werte von Y werden an den Stellen $x_1, \ldots, x_n$ gemessen zu $y_1, \ldots, y_n$. Wegen Messfehlern etc. liegen die Punkte $P_i = (x_i, y_i)$ nicht exakt auf einer Geraden.
Berechnen Sie die Ausgleichsgerade zu $P_1, \ldots, P_n$, d.h. die Gerade mit der Gleichung $Y = \widehat{a}X + \widehat{b}$, für welche die Summe der Fehlerquadrate $\sum(y_i - \widehat{y_i})^2$ minimal wird ($\widehat{y_i} := \widehat{a}x_i + \widehat{b}$), mit $n = 10$ und

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
y_i	1	1,6	2,1	2,5	2,9	3,4	4,0	4,6	5,1	5,6

(ii) Jetzt hänge Y von X ab durch $Y = aX^2 + bX + c$ mit unbekannten Konstanten a, b, c.
Beschreiben Sie analog zu Beispiel 4.2.14 (iii) der Vorlesung die Konstruktion der Ausgleichsparabel zu $P_1, \ldots, P_n$, d.h. der Funktion $Y = \widehat{a}X^2 + \widehat{b}X + \widehat{c}$, die $P_1, \ldots P_n$ optimal approximiert, und leiten Sie eine Formel für $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}$ her.

Abgabe bis Freitag, den 17.07.2015 vor der Vorlesung in die Briefkästen