Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

13. Übung zur Linearen Algebra II, SS 2015

Aufgabe 1. *(10 Punkte)*
Der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$ sei mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

versehen. Die zugehörige Norm sei $\|\,.\,\|$.
Welches Polynom $f(X)$ der Gestalt $X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ approximiert am besten das Nullpolynom bezüglich $\|\,.\,\|$?

Aufgabe 2. *(4 + 8 + 8 = 20 Punkte)*
Es seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und A eine kommutative Unteralgebra von $E = \mathrm{End}_K(V)$.
(Eine *K-Algebra* A ist ein K-Vektorraum A, versehen mit einer Multiplikationsabbildung

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & A \times A & \longrightarrow & A \\ & (a,b) & \longmapsto & a \cdot b = ab\,, \end{array}$$

die A zu einem Ring mit $1 = 1_A$ macht. Darüber hinaus muss gelten:
Für alle $\lambda \in K$ und $a \in A$ ist $\lambda a = (\lambda 1_A) \cdot a = a \cdot (\lambda 1_A)$.)
Ein *Charakter* von A ist ein K-Algebren-Homomorphismus $\chi : A \to K$, d.h. ein K-linearer Ringhomomorphismus.
Zeigen Sie:
(*i*) Ist $v \in V$ ein gemeinsamer Eigenvektor für alle $a \in A$, d.h. ist $av = \chi(a)v$ mit $\chi(a) \in K$, so ist $\chi : a \mapsto \chi(a)$ ein Charakter von A.
(*ii*) Zu einem Charakter χ sei

$$V_\chi := \{v \in V \mid \forall a \in A : av = \chi(a)v\}\,.$$

Sind $\chi_1, \ldots \chi_r$ verschiedene Charaktere, so ist

$$\sum_{1 \le i \le r} V_{\chi_i} = \bigoplus V_{\chi_i}\,.$$

(*iii*) Sind alle Elemente von A diagonalisierbar, so gibt es endlich viele Charaktere χ_i von A mit

$$V = \bigoplus_{1 \le i \le r} V_{\chi_i}\,.$$

— BITTE WENDEN —

Aufgabe 3. *(10 Punkte)*
Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ die Bilinearform mit Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Basis von V, bzgl. der β durch eine Diagonalmatrix B' mit Einträgen in $\{0, \pm 1\}$ gegeben ist.

Abgabe bis Freitag, den 24.07.2015 vor der Vorlesung in die Briefkästen