Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

2. Übung zur Linearen Algebra II, SS 2015

Aufgabe 1. *(5 + 5 + 10 + 10 = 30 Punkte)*
Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einem Körper K, U ein Untervektorraum von V, R der Ring $\mathrm{End}_K(V)$ (vgl. Aufgaben 1 und 3, Blatt 1).
Zeigen Sie:
(i) $L_U := \{f \in R \mid f\,|_U = 0\}$ ist ein Linksideal von R.
(ii) Jedes Linksideal von R ist von der Form L_U zu einem geeigneten U, und $U \mapsto L_U$ ist eine Bijektion der Menge der Unterräume von V mit der Menge der Linksideale von R.
(iii) Geben Sie eine entsprechende Beschreibung der Menge der Rechtsideale von R durch die Menge der Unterräume von V.
(iv) Zeigen Sie: R besitzt keine nichttrivialen Ideale.

Aufgabe 2. *(3 + 3 + 4 = 10 Punkte)*
Es sei R ein Ring und M eine additiv geschriebene abelsche Gruppe, sowie $E := \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ der Ring der $\mathbb{Z}$-Endomorphismen (Gruppenhomomorphismen von M nach M mit Hintereinanderausführung als Multiplikation) von M.
Zeigen Sie:
(i) Ist $\varrho : R \to E$ ein Ringhomomorphismus, so definiert

$$r \cdot x := (\varrho(r))(x)$$

eine Struktur als R-Modul auf M.
(ii) Ist M ein R-Modul, so ist

$$\varrho : \begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & E \\ r & \longmapsto & (x \mapsto rx) \end{array}$$

ein (wohldefinierter!) Ringhomomorphismus.
(iii) Durch (i) und (ii) wird eine Bijektion zwischen der Menge der Ringhomomorphismen von R nach E und der Menge der R-Modulstrukturen auf der abelschen Gruppe M gegeben.

Abgabe bis Freitag, den 08.05.2015 vor der Vorlesung in die Briefkästen