Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

3. Übung zur Linearen Algebra II, SS 2015

Aufgabe 1. *(10 Punkte)*
Zeigen Sie: Jeder endliche Integritätsring A ist ein Körper.

Hinweis: Betrachten Sie für $0 \neq \alpha \in A$ die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} m_\alpha : & A & \longrightarrow & A \\ & \beta & \longmapsto & \alpha\beta\,. \end{array}$$

Aufgabe 2. *(10 + 10 = 20 Punkte)*
Es seien $g, h \in \mathbb{Q}[X]$ normierte Polynome, sodass $f := g \cdot h$ Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ besitzt.
(i) Zeigen Sie: Sind die Grade $d(g)$, $d(h)$ von g bzw. h in $\{1, 2\}$, so haben bereits g und h Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.
(ii) Verallgemeinern Sie die Aussage aus (i) für Polynome g, h ohne die Gradeinschränkung.

Aufgabe 3. *(4 + 3 + 3 = 10 Punkte)*
Bestimmen Sie (unter Angabe aller Zwischenschritte) den ggT von
(i) 458.349.131 und 3.700.637 in $\mathbb{Z}$;
(ii) $X^8 - 1$ und $X^3 - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$;
(iii) $X^5 + X^2 + 1$ und $X^3 + X + 1$ in $\mathbb{F}_2[X]$. ($\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist der Körper mit 2 Elementen.)

Abgabe bis Freitag, den 15.05.2015 vor der Vorlesung in die Briefkästen