Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

4. Übung zur Linearen Algebra II, SS 2015

Aufgabe 1. *(1 + 2 + 7 = 10 Punkte)*
Es sei $\varrho \in \mathbb{C}$ mit $\varrho^2 + \varrho + 1 = 0$.
(i) Zeigen Sie: $\varrho^3 = 1$.
(ii) Es sei $\mathbb{Z}[\varrho] \subset \mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen $a + b\varrho$, mit $a, b \in \mathbb{Z}$.
Rechnen Sie nach, dass $\mathbb{Z}[\varrho]$ ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist.
(iii) Betrachten Sie die Funktion

$$\delta : \mathbb{Z}[\varrho] - \{0\} \to \mathbb{N},\ z \mapsto |z|^2 = z\bar{z}\,,$$

wobei $z \mapsto \bar{z}$ die komplexe Konjugation bezeichne.
Überprüfen Sie, dass $\mathbb{Z}[\varrho]$ vermöge δ ein euklidischer Ring ist.

Aufgabe 2. *(5 + 5 = 10 Punkte)*
Es sei R der Ring $\mathbb{Z}[\varrho]$ aus Aufgabe 1.
Berechnen Sie einen Erzeuger für das von a und b erzeugte Ideal (dies ist ein Hauptideal (c) !)
(i) für $(a, b) = (5 + 4\varrho,\ 3 + 8\varrho)$;
(ii) für $(a, b) = (2 + \varrho,\ 4 + 3\varrho)$.

Aufgabe 3. *(10 Punkte)*
Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{array}{ccccr} x & \equiv & 1 & \bmod & 4\,, \\ x & \equiv & 2 & \bmod & 7\,, \\ x & \equiv & 3 & \bmod & 15\,. \end{array}$$

Aufgabe 4. *(10 Punkte)*
Es sei $R = \mathbb{R}[X]$ der Polynomring über $\mathbb{R}$ in der Unbestimmten X, und für $f \in R$, $j \in \mathbb{N}$ sei $f^{(j)}$ die j-te Ableitung von f.
Für $1 \leq i \leq k \in \mathbb{N}$ seien gegeben:

- verschiedene reelle Zahlen a_i ;
- Vielfachheiten $n_i \geq 1$;
- für jedes $0 \leq j < n_i$ eine reelle Zahl $b_{i,j}$.

Zeigen Sie:
Es gibt genau ein Polynom $f \in R$ des Grades

$$< n := \sum_{1 \leq i \leq k} n_i$$

und der Eigenschaft:

$$\text{Für alle } (i,j) \text{ mit } 1 \leq i \leq k,\ 0 \leq j < n_i \text{ ist } f^{(j)}(a_i) = b_{i,j}\ .$$

Inwiefern ist diese Aussage ein Spezialfall des chinesischen Restsatzes?

Abgabe bis Freitag, den 22.05.2015 vor der Vorlesung in die Briefkästen