Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

5. Übung zur Linearen Algebra II, SS 2015

Aufgabe 1. *(5 + 5 = 10 Punkte)*
(i) Es sei $R = \mathbb{Z}[X]$ und $\mathfrak{m} = (2, X)$ das von 2 und X erzeugte Ideal.
Zeigen Sie, dass $\mathfrak{m}$ kein Hauptideal ist und dass $\mathfrak{m}$ als R-Modul nicht von einem Element erzeugbar ist, obwohl R als R-Modul die Basis $\{1\}$ hat.
(ii) Es sei R_1 der Unterring $\{\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in R \mid 2 \mid a_i \text{ für } i > 0\}$ von R und

$$\mathfrak{m}_1 = 2R = \{\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in R \mid 2 \mid a_i \text{ für alle } i\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{m}_1$ als R_1-Modul nicht endlich erzeugt ist. Andererseits ist R_1 als R_1-Modul endlich erzeugt ($\{1\}$ ist Basis).

Wieso stehen die obigen Beispiele nicht in Widerspruch zu den Sätzen der Vorlesung?

Aufgabe 2. *(1 + 3 + 6 = 10 Punkte)*
Es seien $v_1 = (2, 6)$, $v_2 = (6, 15)$ und $v_3 = (5, 5)$. Betrachten Sie das Erzeugnis von $\langle v_1, v_2, v_3\rangle =: N \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ als Untermodul des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Zeigen Sie:
(i) $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist keine Basis von N.
(ii) Je zwei der Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind $\mathbb{Z}$-linear unabhängig, aber keine Basis von N.
(iii) Bestimmen Sie eine Basis von N.

— BITTE WENDEN —

Aufgabe 3. *(20 Punkte)*
Es sei M der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}^4$ und N der Untermodul, der von den Spalten der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.
Schreiben Sie den Restklassenmodul M/N in der Form $M/N = F \oplus T$ mit einem freien Modul F und einem Torsionsmodul T, und bestimmen Sie eine Basis von F.

Abgabe bis Freitag, den 29.05.2015 vor der Vorlesung in die Briefkästen