Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

6. Übung zur Linearen Algebra II, SS 2015

Aufgabe 1. *(5 + 5 = 10 Punkte)*
(i) Es sei (X^2+1) das vom Polynom X^2+1 in $\mathbb{R}[X]$ erzeugte Ideal.
Zeigen Sie: Es gibt einen Ringisomorphismus $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{C}$.
(ii) Konstruieren Sie einen Körper mit 8 Elementen.

Aufgabe 2. *(10 Punkte)*
Bestimmen Sie die kleinste positive und die betragskleinste ganze Zahl x mit:

$$\begin{array}{rcrcr} x & \equiv & 1 & \text{mod} & 4 \\ x & \equiv & 3 & \text{mod} & 5 \\ x & \equiv & 5 & \text{mod} & 12 \\ x & \equiv & 11 & \text{mod} & 18 \end{array}$$

Aufgabe 3. *(5 + 5 = 10 Punkte)*
Es sei R ein Hauptidealring, S ein Repräsentantensystem für die Menge der Primelemente von R modulo Assoziiertheit und M, N zwei endlich erzeugte R-Torsionsmoduln.
Ferner seien

$$M = \bigoplus_{p \in S} M(p)\,, \qquad N = \bigoplus_{p \in S} N(p)$$

die Primärzerlegungen von M und N. (Fast alle der Komponenten $M(p)$ bzw. $N(p)$ sind $\{0\}$.)
Zeigen Sie:
(i) Für jeden Homomorphismus $\varphi : M \to N$ und jedes Primelement $p \in S$ gilt: $\varphi(M(p)) \subset N(p)$.
(ii) φ ist genau dann bijektiv (injektiv, surjektiv), wenn für alle $p \in S$ gilt:

$$\varphi_p = \varphi\,|_{M(p)}\colon\ M(p) \longrightarrow N(p)$$

ist bijektiv (injektiv, surjektiv).

Aufgabe 4. *(2 + 3 + 5 = 10 Punkte)*
Bestimmen Sie die Primärzerlegung folgender $\mathbb{Z}$-Moduln:
(i) $\mathbb{Z}/(72)$;
(ii) $\mathrm{Tor}(M)$, wobei $M = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\langle(15,35)\rangle$;
(iii) $\mathrm{Tor}(M)$, wobei $M = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\langle(0,4),(12,6)\rangle$.

Abgabe bis Freitag, den 05.06.2015 vor der Vorlesung in die Briefkästen