



8. Übung zur Linearen Algebra II,
SS 2015

Aufgabe 1. (5 + 5 = 10 Punkte)

Bestimmen Sie “die” Elementarteilermatrix A zu $B \in \mathbb{Z}^{3 \times 3}$ und beschreiben Sie die Restklassengruppe \mathbb{Z}^3/N_i , wobei N_1 bzw. N_2 von den Spaltenvektoren bzw. den Zeilenvektoren von B erzeugt wird, mit

$$(i) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(ii) \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Ist $\text{rg}(B) = r < n$, so hat die Elementarteilerform die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & q_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & q_r \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Elementarteiler q_i ($1 \leq i \leq 3$, alle q_i normiert mit $q_1 \mid q_2 \mid q_3$ in $R = \mathbb{Q}[X]$) der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} X+1 & 2 & -2X-4 \\ 1 & X & -3 \\ 1 & 1 & X-4 \end{pmatrix} \in R^{3 \times 3}.$$

Finden Sie Elemente S, T von $\text{GL}(3, R)$, sodass

$$A = SQT^{-1} \quad \text{mit} \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Finden Sie die Normalform der Matrix $B \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}$ mit

$$B := \begin{pmatrix} 9 & -6 & 12 & -8 \\ 10 & -8 & 14 & -13 \\ -4 & 3 & -5 & 4 \\ -4 & 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. (8 + 2 = 10 Punkte)

Es sei $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen und G die Gruppe $GL(2, \mathbb{F}_p)$.

(i) Bestimmen Sie die Zahl der Konjugationsklassen von G .

(ii) Die Eigenraumstruktur von $A \in G$ hängt nur von den Konjugationsklassen von A ab (das brauchen Sie nicht zu zeigen. Unter "Eigenraumstruktur" verstehen wir die Eigenwerte und die zugehörigen geometrischen Vielfachheiten).

Beschreiben Sie für jede Konjugationsklasse die Eigenraumstruktur.

Hinweis: Die möglichen 2×2 -Matrizen in Normalform bilden ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen. Also müssen Sie die möglichen Normalformen abzählen.

Abgabe bis Freitag, den 19.06.2015 vor der Vorlesung in die Briefkästen