Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

9. Übung zur Linearen Algebra II, SS 2015

Aufgabe 1. *(5 + 5 = 10 Punkte)*
Bestimmen Sie "die" Elementarteiler der folgenden Matrizen A über den Ringen R.
(i) $R = \mathbb{Z}[i]$,

$$A = \begin{pmatrix} -5-3i & 2-2i \\ 4 & 2i \end{pmatrix};$$

(ii) $R = \mathbb{Q}[X]$,

$$A = \begin{pmatrix} X & 0 & -X^2 \\ -X^2 & X & 0 \\ -X & 0 & X \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. *(7 + 3 = 10 Punkte)*
Es seien a, b, c paarweise verschiedene Elemente des algebraisch abgeschlossenen Körpers K.
Beschreiben Sie alle Jordan-Normalformen $J \in K^{10\times 10}$, die Matrizen $A \in K^{10\times 10}$ mit charakteristischem Polynom

$$\chi_A(T) = (T-a)^2 \cdot (T-b)^3 \cdot (T-c)^5 \in K[T]$$

haben können.
Welche davon haben Minimalpolynom

$$p_A(T) = (T-a) \cdot (T-b)^2 \cdot (T-c)^2 \ ?$$

— BITTE WENDEN —

Aufgabe 3. *(2 + 3 + 5 = 10 Punkte)*
Untersuchen Sie in den folgenden Fällen, ob die gegebene Matrix $A \in K^{n\times n}$ eine Jordan-Normalform J über dem Körper K besitzt und bestimmen Sie J, falls es existiert.

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}\,;$$

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}\,;$$

(iii)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}\,.$$

Aufgabe 4. *(10 Punkte)*
Es sei A die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}\,.$$

Schreiben Sie A in der Form $A = D + N$ mit $D \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ diagonalisierbar, $N \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ nilpotent und so, dass $DN = ND$ gilt.

Erinnerung: Eine $n \times n$-Matrix B heißt nilpotent, falls $B^n = 0$ gilt.

Abgabe bis Freitag, den 26.06.2015 vor der Vorlesung in die Briefkästen