Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

(Blatt 3)

Hauptklausur zur Linearen Algebra 1 im WS 2014/2015

Aufgabe 2. *(10 = 3 + 7 Punkte)*
Es sei α eine reelle Zahl. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & (\alpha+5)\cdot x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & (\alpha+5)\cdot x_2 & + & (1+\alpha)\cdot x_3 & = & -1 \end{array}$$

in den reellen Variablen x_1, x_2, x_3.

a) Für welche Werte von α existieren keine bzw. genau eine bzw. mehrere Lösungen?

b) Bestimmen Sie im Falle der Lösbarkeit die jeweilige Lösungsmenge.

Aufgabe 3. *(10 = 1 + 4 + 5 Punkte)*
Es sei für $n \geq 2$

$$\{0\} \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \to \ldots \to V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} \{0\}$$

eine Folge von endlichdimensionalen Vektorräumen V_i $(1 \leq i \leq n)$ über dem Körper K und linearen Abbildungen f_i $(0 \leq i \leq n)$, wobei für $1 \leq i \leq n$ gelte:

$$\mathrm{im}(f_{i-1}) = \ker(f_i)\,.$$

Eine derartige Folge heißt eine *exakte Folge* von Vektorräumen.
(*Hinweis:* f_0 und f_n sind jeweils der Nullhomomorphismus 0.)
Zeigen Sie:

a) f_1 ist injektiv und f_{n-1} ist surjektiv.

b) Für $n \geq 3$ sind auch die Folgen

$$\{0\} \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \to \ldots \to V_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} \mathrm{im}(f_{n-2}) \xrightarrow{0} \{0\}$$

und

$$\{0\} \xrightarrow{0} \ker(f_{n-1}) \xrightarrow{g} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} \{0\}$$

(dabei ist g die Einbettungsabbildung) exakt.

c) Für die alternierende Summe der Dimensionen gilt:

$$\sum_{1\leq i\leq n} (-1)^i \dim(V_i) = 0\,.$$

Aufgabe 4. *(10 = 6 + 4 Punkte)*
Es sei A die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3},$$

wobei $\mathbb{F}_5$ der Körper mit 5 Elementen sei.
Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Basis aus Eigenvektoren.

Aufgabe 5. *(10 = 2 + 5 + 3 Punkte)*
Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 und $\mathcal{E} := \{1, X, X^2\}$ die Standardbasis von V.
Weiterhin seien in V die Polynome

$$p_k := (X+k)^k, \quad k = 0, 1, 2,$$

gegeben. Diese bilden ebenfalls eine Basis $\mathcal{B} := \{p_0, p_1, p_2\}$ von V.

a) Geben Sie die Basiswechselmatrix $A_{\mathrm{id},\mathcal{E},\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$ an.

b) Es sei $\mathcal{B}^* := \{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis des Dualraums V^* von V.
Beschreiben Sie die Linearformen ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 durch ihre Wirkung auf $1, X, X^2$.

c) Stellen Sie die Linearform

$$\psi : V \to \mathbb{R}, \psi(q) := q(-1)$$

als Linearkombination aus $\mathcal{B}^*$ dar.

Aufgabe 6. *(10 = 2 + 5 + 3 Punkte)*
Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension n und $f : V \times V \to K$ eine *nichtausgeartete* Bilinearform.
Zu einem Untervektorraum U von V sei

$$U^{\perp} := \{v \in V \mid \forall u \in U : f(u,v) = 0\}.$$

Zeigen Sie:

a) $U^{\perp}$ ist ein Untervektorraum.

b) $\dim(U) + \dim(U^{\perp}) = n$.

c) Für $U^{\perp\perp} := (U^{\perp})^{\perp}$ gilt: $U = U^{\perp\perp}$.

Viel Erfolg !