Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

(Blatt 3)

Nachklausur zur Linearen Algebra I im WS 2014/2015

Aufgabe 2. *(10 Punkte)*
Es sei α eine reelle Zahl. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccccl} x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & + & (10\alpha+12)\cdot x_2 & + & (5\alpha-9)\cdot x_3 & = & 6 \\ -5x_1 & + & 10\alpha \cdot x_2 & + & (10\alpha-20)\cdot x_3 & = & 10 \end{array}$$

in den reellen Variablen x_1, x_2, x_3.
Für welche Werte von α existieren keine bzw. genau eine bzw. mehrere Lösungen?
Bestimmen Sie im Falle der Lösbarkeit die jeweilige Lösungsmenge.

Aufgabe 3. *(10 Punkte)*
Es seien $A \in K^{r\times r}$ und $B \in K^{s\times s}$ Matrizen über dem Körper K und $M \in K^{n\times n}$ die Matrix mit Blockstruktur

$$M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $n = r + s$.
Berechnen Sie $\det(M)$, d.h. drücken Sie $\det(M)$ durch $\det(A)$ und $\det(B)$ aus.

Aufgabe 4. *(10 = 3 + 2 + 4 + 1 Punkte)*
Es sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_A, die Eigenwerte von A, sowie jeweils die zugehörigen Eigenräume.
Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 5. *(10 = 5 + 1 + 3 + 1 Punkte)*
Es sei V ein K-Vektorraum endlicher Dimension $n > 0$ und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit Kern U der Dimension $r > 0$.
Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f^k = f \circ \ldots \circ f$ die k-fache Hintereinanderausführung von f und U_k der Kern von f^k.
Zeigen Sie:

a) Für alle k gilt: $\dim(U_k) \leq k \cdot r$.

b) Ist f *nilpotent der Stufe* k (d.h. gilt: $f^k = 0$), so ist $k \geq \frac{n}{r}$.

Ab jetzt sei f nilpotent, d.h. es existiere ein k mit $f^k = 0$.

c) Zeigen Sie, dass $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert von f ist.
Wie sieht das charakteristische Polynom $\chi_f(x)$ aus?

d) Bestimmen Sie die algebraische und die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda = 0$.

Aufgabe 6. *(10 = 3 + 1 + 6 Punkte)*
Es sei V der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt $< \, , >$, und U der Unterraum

$$U = \{x = (x_1, x_2, x_3)^t \in V \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}\,.$$

a) Geben Sie eine Basis B von U an und konstruieren Sie daraus eine Orthonormalbasis B' von U.

b) Setzen Sie B' zu einer Orthonormalbasis C von V fort.

c) Es sei $x = (0, 3, -3)^t \in V$.
Berechnen Sie die Projektion von x auf U und die Spiegelung von x an U, sowie die Winkel (durch die Angabe deren Cosinus) zwischen x und den Elementen von C.

Viel Erfolg !