Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Ergänzung zur Linearen Algebra I, WS 2014/2015

"Beschreibung linearer Abbildungen durch Matrizen; Basiswechsel"

Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine (numerierte) Basis von V, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ eine Basis von W.
Die Matrix $A = A_{f,X,Y} = (\alpha_{i,j}) \in K^{m\times n}$ ist gegeben durch

$$f(x_j) = \sum_{1\leq i\leq m} \alpha_{i,j} y_i \qquad (1 \leq j \leq n)\,.$$

Dies entspricht der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\kappa_X"'] & W \arrow[d, "\kappa_Y"] \\ K^n \arrow[r, "A"] & K^m \end{tikzcd}$$

Dabei ordnet κ_X (bzw. κ_Y) jedem Vektor $v = \sum \lambda_j x_j$ seine Koordinaten $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t$ (bzw. jedem $w = \sum \mu_i y_i$ seine Koordinaten $(\mu_1, \dots, \mu_m)^t$) zu.

Seien $X^{'} = \{x_1^{'}, \dots, x_n^{'}\}$, $Y^{'} = \{y_1^{'}, \dots, y_m^{'}\}$ weitere Basen von V bzw. von W und $C = (\gamma_{i,j}) \in K^{n\times n}$, $D \in K^{m\times m}$ die Basiswechselmatrizen von X nach $X^{'}$ bzw. von Y nach $Y^{'}$. Dann ist

$$x_j' = \sum_{1\leq i\leq n} \gamma_{i,j} x_i \qquad (1 \leq j \leq n)\,,$$

d.h. $C = A_{id,X',X}$ (beachte hier die Reihenfolge!)
und

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\kappa_{X'}"'] \arrow[dr, "\kappa_X"] & \\ K^n \arrow[rr, "C"] & & K^m \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Entprechendes gilt für den Basiswechsel in W von Y nach $Y^{'}$ mittels der Matrix $D = A_{id,Y',Y}$.

Der Basiswechselsatz besagt jetzt:
Mit $A^{'} = A_{f,X',Y'}$ gilt
$$A^{'} = D^{-1}AC\,,$$
was man durch “Diagrammjagen” im folgenden kommutativen Diagramm einsieht:

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\kappa_{X'}"'] \arrow[d, "\kappa_X"] & W \arrow[d, "\kappa_Y"] \arrow[dr, "\kappa_{Y'}"] & \\
K^n \arrow[r, "\cong", "C"'] \arrow[rrr, bend right, dotted, "A^{'}"'] & K^n \arrow[r, "A"] & K^m & K^m \arrow[l, "\cong"', "D"]
\end{tikzcd}$$

Dabei sind $\kappa_{X'}, \kappa_X, \kappa_Y, \kappa_{Y'}$ Isomorphismen, und $A^{'}$ beschreibt die wohlbestimmte kommutative Ergänzung entlang des gestrichelten Pfeils.