Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

(Blatt 3)

Zwischenklausur zur Linearen Algebra 1 im WS 2014/2015

Aufgabe 2. *(10 = 4 + 6 Punkte)*
Jede der beiden folgenden Gleichungen besitzt genau zwei Lösungen in $\mathbb{C}$.
Finden Sie diese und geben Sie Ihre Ergebnisse in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an (dabei ist i die imaginäre Einheit).

(1) $z^2 + (2 - 2i)z - (1 + 2i) = 0.$
(2) $(1 + i)z^2 + (-1 + i)z + 2 + 2i = 0.$

Aufgabe 3. *(10 = 4 + 6 Punkte)*
Für welche $\alpha \in K$ ist die Teilmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

von K^3 linear unabhängig, falls

(1) $K = \mathbb{R}$,
(2) $K = \mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p? (*Hinweis:* Das Ergebnis hängt von p ab!)

Aufgabe 4. *(10 = 6 + 4 Punkte)*
Es sei α eine reelle Zahl.
Wir betrachten die Unterräume

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } U_\alpha = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha + 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

des $\mathbb{R}^3$.

(1) Bestimmen Sie $\dim(U_\alpha)$, $\dim(U_\alpha \cap U)$ und $\dim(U_\alpha + U)$ in Abhängigkeit von α.
(2) Finden Sie einen Unterraum V des $\mathbb{R}^3$ mit $V \neq U_\alpha$, für alle α, und $\mathbb{R}^3 = V \oplus U$.

- Bitte wenden -

Aufgabe 5. (10 = 5 + 5 Punkte)

(1) Bringen Sie die Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 6}$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

auf Zeilenstufenform.

(2) Bestimmen Sie die Inverse M^{-1} von $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6. *(10 Punkte)*

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit $x = (x_1, \ldots, x_5)^t$, $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$, $b = (10, 7, 4, 3)^t \in \mathbb{R}^4$, sowie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & -4 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}.$$

Beschreiben Sie die Lösungsmenge $M_{A,b} \subset \mathbb{R}^5$ in der Form $M_{A,b} = U + x^{(0)}$ mit einem Untervektorraum U (mit Basis!) von $\mathbb{R}^5$ und einem $x^{(0)} \in \mathbb{R}^5$.

Viel Erfolg !