Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Präsenzübung 2 zur Linearen Algebra I, WS 2014/2015

Aufgabe 1. *(0 Punkte)*
(i) Finden und beweisen Sie einen geschlossenen Ausdruck für $\sum_{1\leq i\leq n} i(i+1)$.
(ii) Überprüfen Sie die folgende Aussage. Wo steckt der Fehler?
Beh.: Alle natürlichen Zahlen sind gleich.
Bew.: Wir zeigen dazu für alle $n \in \mathbb{N}$: *Aussage $A(n)$:* Wenn sich unter n Schuhen *ein* Schuh befindet, in den sich eine Maus eingenistet hat, so haben sich schon in *allen* Schuhen Mäuse eingenistet. Die Behauptung folgt dann als Korollar.

Bew.: Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Die Aussage $A(1)$ ist offensichtlich wahr, denn wenn in einem Schuh eine Maus nistet, dann nistet in diesem Schuh eine Maus.

Induktionsschluss: Sei unter $n+1$ Schuhen ein Schuh, in dem eine Maus nistet. Wir stellen die Schuhe in eine Reihe und betrachten die ersten n und die letzten n Schuhe. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit das Mäusenest in einem der ersten n Schuhe. Nach der Induktionsannahme nisten dann schon in allen der ersten n Schuhe Mäuse. Damit befindet sich aber auch unter den letzten n Schuhen ein Schuh, in dem eine Maus nistet; und wiederum mit der Induktionsannahme folgt, dass in allen der letzten n Schuhe Mäuse nisten. Insgesamt nisten also in allen $n+1$ Schuhen Mäuse.

Aufgabe 2. *(0 Punkte)*
Es seien $X, Y, Z \subset M$ mit $\#(X) = n$, $\#(Y) = m$. Beweisen Sie:
(i) $\#\mathrm{Abb}(X, Y) = m^n$.
(ii) $\#\mathrm{Sym}(X) = n!$.
(iii) Sind die Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ injektiv, dann gilt dies auch für die Komposition $g \circ f : X \to Z$.
(iv) Sind die Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ surjektiv, dann gilt dies auch für die Komposition $g \circ f : X \to Z$.

Aufgabe 3. *(0 Punkte)*
Welche der folgenden Teilmengen in $\mathbb{R}^2$ sind Graphen einer Abbildung $f : A_i \to \mathbb{R}$ mit $a \in A_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, ..., 3$? Wie können Sie ggf. die Menge A_i anpassen, um den Graph einer solchen Abbildung zu erhalten?
(i) $A_1 := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 5 \text{ und } y \geq 2\}$.
(ii) $A_2 := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 5 \text{ und } 1 \leq \frac{1}{5}y - \frac{3}{5}x\}$.
(iii) $A_3 := \{(x, y) \mid y^2 = x\}$.

keine Abgabe;
die Besprechung erfolgt in der dritten Semesterwoche in den Übungen