Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

1. Übung zur Linearen Algebra I,

WS 2014/2015

Aufgabe 1. *(10 = 2 + 2 + 2 + 4 Punkte)*
Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen. Sei weiter $h : X \to Z$, $x \mapsto g(f(x))$ die Komposition von f und g. Beweisen Sie:
(i) Ist h surjektiv, dann auch g.
(ii) Ist h injektiv, dann auch f.
(iii) In (i) muss f nicht surjektiv sein und in (ii) g nicht injektiv. Geben Sie Beispiele an!
(iv) Ist X endlich und $f : X \to X$ eine Abbildung, so sind äquivalent:

- f ist injektiv;
- f ist surjektiv;
- f ist bijektiv.

Aufgabe 2. *(10 = 10 · 1 Punkte)*
Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bjektiv?
Welche sind gar nicht wohldefiniert?
(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{\mathbf{2}}$,
(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{\mathbf{3}}$,
(iii) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{\mathbf{2}}$,
(iv) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{\mathbf{3}}$,
(v) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^{\mathbf{2}}$,
(vi) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^{\mathbf{3}}$,
(vii) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^{\mathbf{2}}$,
$(viii)$ $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^{\mathbf{3}}$,
(ix) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \sqrt{x}$,
(x) $f : \mathbb{R} \to [0; 1], x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

— BITTE WENDEN—

Aufgabe 3. *(10 = 4 + 4 + 2 Punkte)*
Es seien $(X_1, \leq_1), (X_2, \leq_2), \dots, (X_r, \leq_r)$ geordnete Mengen. Weiter sei $X := X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$ das kartesische Produkt der Mengen X_i für $i = 1, \dots, r$.
Sind $a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ und $b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$ aus X, dann setzen wir

$$a \leq b :\Leftrightarrow \begin{cases} (a = b) & \text{oder} \\ (a_{s+1} \leq_{s+1} b_{s+1}, & \text{mit } s \in \mathbb{N} \text{ und } s < r \text{ max. mit } a_k = b_k \text{ für } 1 \leq k \leq s). \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass $(X, \leq)$ eine Ordnungsrelation ist.
(ii) Zeigen Sie, dass $(X, \leq)$ vollständig geordnet ist, falls alle $(X_i, \leq_i)$ für $i = 1, \dots, r$ vollständig geordnet sind.
(iii) Wo findet diese Ordnungsrelation im Alltag Anwendung? Wie würden Sie sie deshalb nennen?

Aufgabe 4. *(10 = 5 + 5 Punkte)*
Es sei X eine nichtleere Menge und $\text{Äq}(X)$ die Menge der Äquivalenzrelationen auf X.
(i) Für R und $S \in \text{Äq}(X)$ definieren wir die Relation "$\ll$" ("Verfeinerung") durch

$$R \ll S :\Leftrightarrow (\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow xSy).$$

Wir sagen dann: "R ist *feiner* als S".
Zeigen Sie: "$\ll$" ist eine Ordnungsrelation.
(ii) Wieviele Elemente hat $\text{Äq}(X)$ für $X = \{1, 2, 3, 4\}$?

Abgabe bis Freitag, den 07.11.2014 vor der Vorlesung in die Briefkästen

---

Übungsblatt 1:
Wieviel Zeit in Minuten haben Sie für die Bearbeitung dieses Blattes gebraucht?

$$[\qquad]\, min$$

Bitte ausschneiden und anonymisiert in der Übung abgeben.